

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 : Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation :
 $(E): z^2 + 2(1 - \cos \theta)z + 2(1 - \cos \theta) = 0$
- On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) ,
determine en fonction de θ le module et l'argument de
 z_1 et z_2 .
- Soit dans le plan complexe les points $M_1(z_1)$ et
 $M_2(z_2)$. Détermine l'ensemble (C) décrit par M_1 et
 M_2 quand θ décrit $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 2 :

PARTIE I :

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (17 - 4i)z - 11 + 2i$$

où z est un nombre complexe

- Soit $z_0 = a + i$ où a est un nombre réel.
Détermine le réel a pour que le nombre complexe z_0 soit
racine de $P(z) = 0$
- a. Vérifie que $P(z) = (z - 2 - i)[z^2 + (-5 + 3i)z + 4 - 3i]$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

PARTIE II :

Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé
direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les point C, H et A d'affixes
respectives $c = 1, h = 4 - 3i$ et $a = 2 + i$

- Place les points dans le repère
- Détermine le module et un argument du complexe
 $\frac{a-c}{h-c}$ puis en-déduis la nature du triangle CHA
- Soit (L) l'ensemble des points M d'affixes z tel que
 $|z - 3 + i| = \sqrt{5}$
 - Montre que les points C, H et A appartiennent à
 (L)
 - Détermine et construis (L)
- Soit R la transformation qui à tout point M d'affixe z
associe le point M' d'affixe z' tel que :
 $z' = \frac{1}{2}iz + 1 - \frac{1}{2}i$
 - Caractérise la transformation R
 - Détermine l'affixe du point A' image du point A
par R
 - Détermine et construis l'ensemble (L') image de
l'ensemble (L) par R

EXERCICE 3 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$ où a est un paramètre complexe

- a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On note par
 z_1 et z_2 les solutions obtenues

b. Montre que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

- Soient les points A, B, M, N et I d'affixes respectives
 $1; -1 + 2i; i + a; i - a$ et i
 - Montre que M et N sont symétriques par rapport
au point I
 - Montre que lorsque $M \notin (AB)$ alors $AMBN$ est
un parallélogramme
- On suppose que $a = e^{i\theta} + 1 - i$; où $\theta \in [0; 2\pi]$
Montre que lorsque θ varie le point M varie sur le
cercle (C) de centre A et de rayon 1

EXERCICE 4 :

- I. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation
 $(E): z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = 0$

- Montre que l'équation (E) admet une solution réelle
 z_0 que l'on déterminera
- Factorise l'équation (E)
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

- II. On pose $a = 1; b = 3 - 2i$ et $c = \bar{b}$

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes
respectives a, b et c .

Soit M le point d'affixe z distinct de B .

On pose $Z = \frac{z-1}{z-3+2i}$

- Ecris le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$ sous la forme
algébrique. En déduis la nature exacte du triangle
 ABC
- Donne une interprétation géométrique d'un argument
de Z . En-déduis l'ensemble (E) des points M d'affixe
 z tels que Z soit un nombre réel non nul.
- Soit D l'image du point C par la translation de vecteur
 $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = -5 + i$

Détermine l'affixe d du point D puis calcule $\frac{b-a}{d-a}$

En-déduis que D est un point de (E)

EXERCICE 5 :

Soit le nombre complexe $Z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- Calcule Z^2 puis détermine le module et un argument
de Z^2 .
- En déduis le module et un argument de Z
- Détermine l'ensemble des points M d'affixe a tels que
 aZ soit réel.

EXERCICE 6 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère
les nombres :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+11+(11\sqrt{3}-2)i}{2+11i} \text{ et } z_2 = \frac{4+2i}{3-i}$$

- a. Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique
- Détermine le module et un argument de z_1 et z_2
- On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

- Ecris Z sous forme algébrique
- Ecris Z forme trigonométrique de Z .
- En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$
- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$$

EXERCICE 7 :

- I. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation
(E): $z^3 - (1 + 6i)z^2 + (-13 + 2i)z + 1 + 8i = 0$

- Montre que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera
- Factorise l'équation (E)
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

- II. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = i; z_B = 2 + 3i; z_C = -1 + 2i$$

- Place les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$
- Détermine $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis en-déduis la nature du triangle ABC
- Calcule l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle

- III. On considère la transformation S d'expression complexe $z' = 2z + 1 - 2i$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S

EXERCICE 8 :

Soit p le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$p(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4$$

- Détermine les racines carrées de $-8 + 6i$
- Montre qu'il existe un nombre réel a solution de $p(z) = 0$
- Détermine le polynôme q tel que :

$$p(z) = (z - a)q(z)$$

- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$

EXERCICE 9 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^4 - 2(1 + \sqrt{3})z^3 + 2(3 + 2\sqrt{3})z^2 - 4(2 + \sqrt{3})z + 8 = 0$$

- Montre que si le complexe z_0 est solution de l'équation (E) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$
- a. Vérifie que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (E).
b. En déduis une seconde solution z_1
- Détermine les autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (E).

- Représente dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (E) (unité graphique 1cm).
- Détermine la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calcule en cm^2 sa surface.

EXERCICE 10 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par :

$$P(z) = -\frac{1}{2}z^3 + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z^2 - (-\sqrt{6} + 2 + i\sqrt{2})z - 2\sqrt{3} + 2i$$

- Montre que $-\sqrt{3} + i$ est une racine évidente de $P(z)$.
- En-déduis les autres solutions de $P(z) = 0$ notées z_1 et z_2 ($\text{Im}(z_2) < 0$).
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$-\sqrt{3} + i; \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

- Détermine le point M_3 d'affixe z_3 image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport 3.
- Détermine le point M_4 d'affixe z_4 image de M_2 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$
- Calcule A^{2023} et z_1^{2023}

EXERCICE 11 :

- Détermine dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation :

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

Ecris ces solutions sous forme exponentielle.

- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère la transformation T qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que :
 $Z' = Ze^{i\frac{2\pi}{3}}$

- Caractérise la transformation T .
- Soit M_1 le point d'affixe $Z_1 = -\sqrt{3} + i$.
Détermine les affixes des points M_2 et M_3 tels que $M_2 = T(M_1)$ et $M_3 = T(M_2)$
- Construis les points M_1, M_2 et M_3
- Calcule $\frac{Z_2 - Z_3}{Z_1 - Z_3}$. En déduis la nature exacte du triangle $M_1M_2M_3$