

Recueil d'exercices – Nombres complexes

EXERCICE 1 : (5 points)

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On désigne par A et B par les points d'affixes respectives 2 et 3.

a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 6 = 0$. (0,5 pt)

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$.

Détermine la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe $Z = \frac{z_1 - 3}{z_1}$. En déduis la nature du triangle OBM_1 . (1 pt)

c) Démontre que les points O, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ que l'on précisera. Trace le cercle $(\mathcal{C})$ et place les points M_1 et M_2 sur le dessin. (1 pt)

d) Soit M le point d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi]$. Montre que lorsque θ décrit $]-\pi; \pi]$ alors le point M décrit un cercle (Γ) que l'on déterminera. (0,5 pt)

II) 1) Résous dans $\mathbb{Z}$ les systèmes : a) $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$ (0,5 pt) b) $\begin{cases} x \equiv 1[9] \\ x \equiv 0[11] \end{cases}$ (0,5 pt)

2) En déduis la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} n \equiv 3[5] \\ n \equiv 2[7] \\ n \equiv 1[9] \\ n \equiv 0[11] \end{cases}$. (0,5 pt)

3) En rangeant les n pièces de son puzzle. Sékou constate que :

- S'il les range par groupe de 5, il reste 3 pièces ;
- S'il les range par groupe de 7, il reste 2 pièces ;
- S'il les range par groupe de 9, il reste une pièce ;
- S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus rien.

a) Sa mère affirme que $2n - 11$ est divisible par 5; 7; 9 et 11. A-t-elle raison ? Justifie. (0,25 pt)

b) Combien de pièces contient ce puzzle sachant que ce nombre est inférieur à 2000. (0,25 pt)

PUZZLE : jeu de patience, composé d'un grand nombre d'éléments à assembler pour reconstituer une image.

Exercice 10

Détermine le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos \theta - i \sin \theta \quad ; \quad z_2 = -\cos \theta - i \sin \theta \quad ; \quad z_3 = -\sin \theta + i \cos \theta \quad ; \quad z_4 = -\sin \theta - i \cos \theta \quad ; \quad z_5 = \sin \theta + i \cos \theta$$

$$z_6 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}} \quad ; \quad z_7 = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} \text{ et } \theta \in [0; \pi[\quad ; \quad z_8 = \left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right)^n \quad ; \quad z_9 = \frac{1}{1 + i \tan \theta} \text{ et } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$z_{10} = 1 + i \tan \theta \text{ et } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad ; \quad z_{11} = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta \text{ et } \theta \in]0; \pi] \quad ; \quad z_{12} = 2 \cos^2 \theta + i \sin 2\theta \text{ et } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$z_{13} = \frac{(1+i)(\cos \theta + i \sin \theta)}{(\sqrt{3}+i)(\sin \theta - i \cos \theta)} \quad ; \quad z_{14} = \frac{-\cos 2\theta + i \sin 2\theta}{2(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)} \quad ; \quad z_{15} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

$$z_{16} = 1 + i + (1 - i) \tan \alpha \text{ et } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad ; \quad z_{17} = \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha), \alpha \in [0; \pi[.$$

EXERCICE 42

1) On considère le nombre complexe :

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Montrer que : $\arg z + \arg(z - 1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2) On considère le nombre : $A = x + i\sqrt{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de réel x pour laquelle :

$$\arg A + \arg(A - 1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

APPROFONDISSEMENT

48 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$

b) $\frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}, \alpha \in [0; \pi[.$

À tout nombre complexe z , différent de $2 - i$, on associe le nombre complexe :

$$Z = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}.$$

Déterminer et construire dans le plan les ensembles de points M d'affixe z tels que :

- a. Z soit réel
- b. Z soit imaginaire pur
- c. $|Z| = 1$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les solutions z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 de l'équation $z^6 = i$ dans $\mathbb{C}$ tel que leur argument soit dans $[0; 2\pi[$, ordonné en ordre croissant, et représenter les points $A_k(z_k)$ avec $0 \leq k \leq 5$.

2) - Montrer que la droite (A_1A_5) coupe le segment $[OA_0]$ en son milieu.

3) - Soit M_0 le point d'intersection de $[A_0A_2]$ et de $[A_1A_5]$.

- Que représente le point M_0 pour le triangle OA_0A_1 ?

4) - On définit de même manière les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 dans les triangles $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5$ et OA_5A_0 .

- Soit m_k l'affixe du point M_k pour tout k de $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, Déterminer géométriquement le module et un argument de m_0 , puis les modules et un argument de chacun des m_k .

Exercice 4.

1. Démontrer que pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on a : $e^{2i\theta} = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$.
2. Calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{1}{e^{i\theta} - 1}$ et de $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1}$.

Exercice 5.

1. Démontrer que $S = (1 + i)^5 + (1 - i)^5$ est un nombre réel.
2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $S = j^{2n} - j^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Montrer que : $j^2 = \bar{j}$.
 - (b) Démontrer que S est un imaginaire pur pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$.
Montrer que : Pour tout $z \in \mathbb{C}$; $|1 + uz| = |1 + \bar{u}z| \implies z \in \mathbb{R}$