

TSE

Exercices

1) Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$

a) Calculer I_0

b) Par une intégration par parties, calculer I_1

c) Montrer que pour tout entier n non nul, on a la relation de récurrence : $(3 + 2n)I_n = 2I_{n-1}$

2) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

a) Montre qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$;

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}. \text{ Déduis-en le calcul de } I_0$$

b) Prouve par une intégration par parties que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^* ; 2nI_n = (2n - 1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

3) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

a) En intégrant par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

b) Calculer I_0 et I_1

4) .a) Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \sin x dx$

.b) En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2 ; I_3 ; I_4 et I_5

5) .a) Calcule $I = \int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$

.b) on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$

Calcule $I + J$ et I Déduis-en la valeur de J

6) On se propose de calculer les intégrales :

$$I = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx$$

a) Calcule $I + J$

b) Justifie que $I - J = \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx$ et déduis-en à l'aide de

deux intégrations par parties la valeur de $I - J$

c) Déduis-en les valeurs de I et J

7) On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{par } f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \text{ et } g(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$$

1) On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$

a) Calcule $I + J$

b) Calcule $J - I$

c) Déduis-en les valeurs de I et J

2) On note $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx$ et $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [g(x)]^2 dx$

a) Calcule $f'(x)$. Déduis-en la somme $K + L$

b) En inspirant de la première question, calcule les valeurs de K et L

c) Déduis-en la valeur $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)} dx$