

1. Déterminer les racines cubiques de $z = -8i$

Pour trouver les racines cubiques de $z = -8i$, commençons par exprimer ce nombre complexe en notation polaire.

1. Module de z :

$$|z| = |-8i| = 8$$

2. Argument de z :

Comme $z = -8i$ est situé sur l'axe imaginaire négatif, son argument est $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, on peut écrire z sous forme polaire :

$$z = 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Pour trouver les racines cubiques,
notons que si w est une racine
cubique de z , alors :

$$w = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) \right)$$

où $k = 0, 1, 2$ pour obtenir les trois
racines.

1. Calcul du module de w :

$$|w| = \sqrt[3]{8} = 2$$

2. Calcul des arguments pour chaque racine :

- Pour $k = 0$:

$$\arg(w) = \frac{-\pi/2 + 2 \times 0 \times \pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

- Pour $k = 1$: $\arg(w) = \frac{-\pi/2 + 2 \times \pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

- Pour $k = 2$:

$$\arg(w) = \frac{-\pi/2 + 4 \times \pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

Les trois racines cubiques de z sont donc :

$$w_0 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les racines trouvées

Placez chaque racine sur le cercle trigonométrique en fonction de son argument :

- w_0 est situé à un angle de $-\frac{\pi}{6}$.
- w_1 est situé à un angle de $\frac{\pi}{2}$.
- w_2 est situé à un angle de $\frac{5\pi}{6}$.

Ces points devraient former un triangle équilatéral centré à l'origine sur le cercle trigonométrique.

3. Faire la somme des racines et conclure

La somme des racines cubiques d'un nombre complexe est toujours égale à zéro (propriété des racines d'une équation polynomiale). Donc :

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0$$

Conclusion : Les racines cubiques de $z = -8i$ sont w_0 , w_1 , et w_2 , elles se trouvent sur le cercle trigonométrique aux angles $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, et $\frac{5\pi}{6}$, et leur somme est égale à zéro.

Les racines cubiques de $z = -8i$ sont :

$$w_0 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

La somme des racines est

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0.$$

Ainsi, les racines sont w_0 , w_1 , et w_2 et leur somme est égale à zéro.