

Exercice

On considère dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les pts $M(x, y)$, $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(-5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

- 1) Démontrer que $f \circ f = Id$
- 2) Démontrer que l'ensemble des pts, invariant par f est une droite (D) que l'on précisera
- 3) Soit M un pt du plan et M' son image par f
 - a) Démontrer que le pt I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D)
 - b) Démontrer que le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (D)
 - c) En déduire les élt caractéristiques

Valeur

1) Démontrons $f \circ f = Id$

soit $M(x, y)$ $M'(x', y')$ $M''(x'', y'')$ tripts
du plan tels que

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(5x' - 12y' + 24) \\ y'' = \frac{1}{13}(-12x' - 5y' + 36) \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \quad (\Rightarrow) & x'' = x \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) & y'' = y \end{cases}$$

Alors la matrice associée à ce système

est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité

D'où $f \circ f = Id$

2) Ensemble des pts invariants

$$f(M) = M \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 12 \\ y = -\frac{2}{3}x + 12 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des pts invariants est la

droite (D): $y = -\frac{2}{3}x + 2$

3) a) I milieu $[MM']$; $I \in (D)$

$$I \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 = \frac{x+x'}{2} \\ y_1 = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{18x - 12y + 24}{2}$$

$$y_1 = \frac{-12x + 8y + 36}{2}$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 2 \quad (\Rightarrow) \quad 0 = 0$$

D'où $I \in (D)$.

b) $\vec{MM'} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x'-x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \\ y'-y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'-x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \\ y'-y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x'-x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ y'-y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'-x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ y'-y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases}$$

Pour $k = -2x - 3y + 6$

1) ou $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ avec $\vec{u}(\frac{4}{13}; \frac{6}{13})$

c) Les lts caractéristiques

• $f \circ f = \text{Id}$ alors f est une involu

• $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des pts
invariants est la perpendiculaire à (d)
et de vecteur directeur $\vec{u}(\frac{4}{13}; \frac{6}{13})$

Problème :

Soit le plan affine euclidien P muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f: P \rightarrow P$ qui à tout pt $M(x|y) \rightarrow M'(x'|y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet 1 pt invariant J

2) Montrer que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{JM}$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

3) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'eq :

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \text{ par } f.$$

Preuve

1°) Montrons que f admet 1 pt invariant J

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

D'où $J \left(\frac{2}{-4} \right)$ est

le pt invariant.

2°) Montrons $\vec{JM}' = \frac{1}{2} \vec{JM}$

$$\begin{cases} x' - 2 = \frac{1}{2}x + 1 - 2 \\ y' + 4 = \frac{1}{2}y - 2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - 2 = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \\ y' + 4 = \frac{1}{2}y + 2 = \frac{1}{2}(y + 4) \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{JM}' = \frac{1}{2} \vec{JM} \quad \text{D'où}$$

f est une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre J .

$$3) \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x + 2 \\ 2y' = y - 4 \end{cases}$$

KK.

Y. espace E_3 et rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E_3 dans E_3 , qui à tout pt $M(x, y, z)$ associe le pt $M'(x', y', z')$ défini

par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 2) \end{cases}$$

1) Montrer que l'ensemble des pts M invariants par f est un plan P dont on précisera l'éq cartésienne.

2) Montrer que si M est un pt d'image M' par f alors le vecteur $\vec{MM'}$ est orthogonal à P .

3) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à P .

4) Déduire des questions précédentes la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

Réponse :

$$1) f(x, y, z) = 11 \quad (2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z + 2) \\ y = \frac{1}{3}(2x + y - 2z - 2) \\ z = \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad x - y - z - 1 = 0$$

Donc l'ensemble des pts invariant par f est le plan π d'éq cartésienne $x - y - z - 1 = 0$

2) Montrons que si M est 1 pt d'image M' alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à π .

Soit $\vec{u}(1, -1, -1)$ un vecteur normal à π

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + 2y + 2z + 2) - x \\ \frac{1}{3}(2x + y - 2z - 2) - y \\ \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 2) - z \end{cases}$$

$\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{HH'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-2x + 2y + 2z - 2) \\ \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z - 2) \\ \frac{1}{3}(2x - 2y - 2z - 2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(x - y - z - 1) \\ \frac{2}{3}(x - y - z - 1) \\ \frac{2}{3}(x - y - z - 1) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HH'} = -\frac{2}{3} \vec{u} \quad \overrightarrow{HH'} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires}$$

d'où la droite (HH') est orthogonale au plan P .

3) Montrons que le milieu du segment $[HH']$ est ~~orthogonal au plan~~ appartient au plan.

$$\text{Soit } I \text{ milieu du } [HH'] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x' + x}{2} \\ y_1 = \frac{y' + y}{2} \\ z_1 = \frac{z' + z}{2} \end{cases}$$

$$I \in P \Leftrightarrow x_1 - y_1 - z_1 - 1 = 0$$

$$x_1 - y_1 - z_1 - 1 = \frac{x'_1 + x}{2} - \frac{y'_1 + y}{2} - \frac{z'_1 + z}{2} - 1$$

$$-\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{2}{3} - \frac{6}{3}$$

$$\frac{0}{6} = 0$$

d'où $x_1 - y_1 - z_1 - 1 = 0$ par suite $I \in P$.

4) Les élt caractéristiques.

est une symétrie orthogonal d'axe
le P de vecteur normal $\vec{u}$.

Exercices

Le plan est muni du repère $(O; \vec{x}, \vec{y})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1) Démontrer que le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera

2) Démontrer que $f \circ f = \text{id}$

3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques.

Solution

1) Démontrons que le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

$$\vec{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' - x &= \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 - x \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 \end{aligned}$$

$$y' - y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 - y$$

$$y' - y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - 4$$

$$y' - y = \frac{2}{3}(x - 2y - 6)$$

$$\text{Posons } K = x - 2y - 6$$

$$\begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}K \\ y' - y = \frac{2}{3}K \end{cases}$$

$$\vec{MM'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}K \\ \frac{2}{3}K \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

soit $\vec{u}' = k\vec{u}$ ainsi $\vec{u}'$ a une même direction que le vecteur $\vec{u}$

2. Montrons que $f \circ f = f$

1^{ère} Méthode

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$f(M) = M' \text{ et } f(M') = M''$$

$$f(M') = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 \right) - 2 \\ y'' = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 \right) - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{8}{3} - \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{8}{3} - 2 \\ y'' = \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{4}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{3} - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{12}{9}x - \frac{6}{9}y - 2 \\ y'' = \frac{6}{9}x - \frac{3}{9}y - 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases}$$

Donc ~~montrer~~ $f \circ f = f$
 2^{ème} Méthode

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ montrons } A^2 = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} - \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} + \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} - \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{12}{9} & -\frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = A \text{ d'où } f \circ f = f$$

3. Déterminons l'ensemble des points invariants
 f admet un point invariant si $f(a) = a$

$$f(a) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x - x - \frac{2}{3}y - 2 = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{6}{3} = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y - 6 = 0$$

L'ensemble des points invariants est la droite (D): $x - 2y - 6 = 0$

b) La nature de f

$f \circ f = \text{id}$ alors f est une projection

$\vec{m} = k\vec{u}$ alors f est une projection sur la droite (D): $x - 2y - 6 = 0$ de direction de $\vec{u} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Propriété 1:

Une symétrie glissée n'admet pas de pt invariant

Propriété 2:

* Si $\vec{u}$ est normal à (D) alors la composée de $\vec{t}_u \circ S(D)$ est une symétrie orthogonale

* Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (D) alors la composée de $\vec{t}_u \circ S(D)$ est une symétrie glissée.

Similitude plane indirecte

propriété:

écriture complexe

P_1 : toute similitude plane indirecte f a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

P_2 : Soit S la similitude plane indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

* Si $|a| = 1$, alors f est un antideplacement et cet antideplacement est une réflexion si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$

* Si $|a| \neq 1$, alors f admet un pt invariant M_0 , et un seul, et peut se décomposer sous la forme: $f = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$ où S_Δ est une réflexion d'axe (Δ) passant par M_0 et h l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$.

M_0 , (Δ) et $|a|$ sont les éléments caractéristiques de f .

Si $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$ alors f est une symétrie glissée.

Symétrie glissée: composé d'une translation et d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) .

Exercice

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2i$

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2i$$

La nature de la transformation :

L'écriture complexe associée à la transformation est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = -2i$.
Donc la transformation est une similitude indirecte.

Les éléments caractéristiques :

* Le centre σ .

1^{ère} Méthode

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{b + a(\bar{b})}{1 - a(\bar{a})} = \frac{-2i + (1 + i\sqrt{3})(2i)}{1 - (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} \\ &= \frac{-2i + 2i - 2\sqrt{3}}{1 - 4} = \frac{+2\sqrt{3}}{-3} \end{aligned}$$

$$\sigma \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} ; 0 \right)$$

2^{ème} Méthode

$$z' = z \Leftrightarrow z = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2i$$

$$\Leftrightarrow x + iy = (1 + i\sqrt{3})(x - iy) - 2i$$

$$\Leftrightarrow x + iy = x + ix\sqrt{3} - iy + y\sqrt{3} - 2i$$

$$(1) \begin{cases} x = x + y\sqrt{3} \\ y = -y + x\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{3}x = 2 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$ob\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$$

* Le rapport $\alpha = |a| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

* L'axe (Δ): Soit S la similitude indirecte
 $S(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{obM'} = \alpha \overrightarrow{obM}$

$$(1) z' - w = \alpha(z - w) \Leftrightarrow z' = \alpha(z - w) + w$$

$$\cancel{(1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2i} = 2\left(\cancel{x + iy} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2i = 2\left(z - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(1 + i\sqrt{3})(x - iy) - 2i = 2\left(x + iy - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x - iy + 2i\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2i = 2x + 2iy - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x + \sqrt{3}y + i(x\sqrt{3} - y - 2) = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2iy$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x\sqrt{3} - y - 2 = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} - x + \sqrt{3}y = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x\sqrt{3} - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} - 3y = +2 \\ x\sqrt{3} - 3y = 2 \end{cases}$$

Donc l'axe de la similitude indirecte est la droite
 $(\Delta) : x\sqrt{3} - 3y = 2$.

exercice 2

$$(\Delta) : y = px + q \text{ avec}$$

$$p = \frac{\operatorname{Im}(a)}{|a| + \operatorname{Re}(a)}$$

$$w = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$$

$$0_b \in (\Delta).$$

Exercice

Soit Z un nombre complexe tel que : $ZZ^2 + 3\bar{Z}^2 = 5+i$ (1)

a- Demontrez que l'on a : $Z^2 + \bar{Z}^2 = 2$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = -2i$

b- En deduis le module et l'argument de Z^2 .

Solution

1)

$$a) \quad 2Z^2 + 3\bar{Z}^2 = 5+i \quad (\Leftrightarrow) \quad \overline{2Z^2 + 3\bar{Z}^2} = \overline{5+i}$$

$$\Leftrightarrow 2\bar{Z}^2 + 3Z^2 = 5-i$$

On associe les deux égalités au système

$$\begin{cases} 2Z^2 + 3\bar{Z}^2 = 5+i \\ 3Z^2 + 2\bar{Z}^2 = 5-i \end{cases}$$

$$\text{on a } -1 \begin{cases} 2Z^2 + 3\bar{Z}^2 = 5+i \\ 3Z^2 + 2\bar{Z}^2 = 5-i \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5Z^2 + 5\bar{Z}^2 = 10 \\ \hline \Rightarrow Z^2 + \bar{Z}^2 = 2 \end{array}$$

$(\Leftrightarrow)$

$$\begin{cases} -2Z^2 - 3\bar{Z}^2 = -5-i \\ 3Z^2 + 2\bar{Z}^2 = 5-i \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} Z^2 - \bar{Z}^2 = -2i \end{array}$$

b)

$$\begin{cases} Z^2 + \bar{Z}^2 = 2 \\ Z^2 - \bar{Z}^2 = -2i \end{cases}$$

$$2Z^2 = 2 - 2i \quad \Rightarrow Z^2 = 1 - i \quad \Rightarrow |Z^2| = \sqrt{2}$$

$$\text{On a : } z^2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\text{On a : } z^2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = (\sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8})^2$$

$$z = \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8} \quad \text{ou} \quad z = -1 \times \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8} = \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8} \times e^{i\pi} \\ = \sqrt[4]{2} \times e^{i7\pi/8}$$

$$2z^2 + 3\bar{z}^2 = 5 + i$$

$$\text{Démontrons } z^2 + \bar{z}^2 = 2 \text{ et } z^2 - \bar{z}^2 = -2i$$

$$2z^2 + 3\bar{z}^2 = 5 + i \Leftrightarrow 2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + 3(\cos\theta - i\sin\theta)^2 = 5 + i$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta + 3\cos 2\theta - 3i\sin 2\theta = 5 + i$$

$$\Leftrightarrow 5\cos 2\theta - i\sin 2\theta = 5 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\cos 2\theta = 5 \\ -\sin 2\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = 1 \\ \sin 2\theta = -1 \end{cases}$$

$$\text{Or } z^2 + \bar{z}^2 = 2\cos 2\theta = 2(1) = 2 ; \text{ d'où } \boxed{z^2 + \bar{z}^2 = 2 \quad \text{Vraie}}$$

$$z^2 - \bar{z}^2 = 2i\sin 2\theta = 2i(-1) = -2i$$

$$\text{d'où } \boxed{z^2 - \bar{z}^2 = -2i} \quad \text{Vraie}$$

En déduisons le module et un argument de z^2

$$\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = 2 & (1) \\ z^2 - \bar{z}^2 = -2i & (2) \end{cases}$$

$$2z^2 = 2 - 2i$$

$$z^2 = 1 - i$$

$$|z|^2 = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z^2) = -\frac{\pi}{4}$$

1) On considère les deux entiers a et b : $a = 11n + 3$
et $b = 13n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.

2) Soient $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$, $50x - 11y = 3$
En déduire les valeurs de n pour lesquelles
on a $anb \equiv 50$

3) Soient dans $\mathbb{N}^2$ $9y^2 - (x+1)^2 = 32$
Solut

1) soit d un diviseur commun à a et b

$$\begin{matrix} d/a \\ d/b \end{matrix} \Rightarrow d \mid 13(11n+3) - 11(13n-1) = 50$$

$$2) \quad S = \{(nk+6; 50k+27) : k \in \mathbb{N}\}$$

$$50/a \Rightarrow 11n+3 = 50k \quad \Rightarrow 50k - 11n = 3$$

$$n = 50x + 27 \quad x \in \mathbb{N}$$

Exemple 1:

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(1, 1)$ et $C(-2, -1)$ $A'(3, 10)$ $B'(4, 6)$ $C'(-3, -1)$

soit f l'application affine du plan telle que

$$f(A) = A' \quad f(B) = B' \quad \text{et} \quad f(C) = C'$$

1° Montre que f est bijective

2° Détermine l'expression analytique de f .

1° f est bijective si $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) \neq 0$ et $\det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \neq 0$

$$\begin{cases} \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1 \\ \det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \neq 0 \\ \det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \neq 0 \end{cases}$$

alors f est une bijection.

2° L'expression analytique de f est de la forme

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

soit φ l'appl'catⁿ linéaire amo aée.

$$\begin{cases} \varphi(\vec{AB}) = \vec{A'B'} \\ \varphi(\vec{AC}) = \vec{A'C'} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + a'\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = b\vec{i} + b'\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{A'B'} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{A'C'} \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$
 $\vec{AC} = -4\vec{i} - \vec{j}$

$$\vec{A'B'} = \vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{A'C'} = -6\vec{i} - 11\vec{j}$$

$$\begin{cases} \varphi(\vec{AB}) = \vec{A'B'} \\ \varphi(\vec{AC}) = \vec{A'C'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ \varphi(-4\vec{i} - \vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + 2\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ -4\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$

ainsi $\begin{cases} a=1, b=2 \\ a'=3, b'=-1 \end{cases}$

donc $M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

L'expression analytique associée à φ

$$\vec{u}(x, y) = \vec{u}'\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

Alors l'expression analytique de f est

$$\begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases}$$

$$\text{soit } f(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x_A' = x_A + 2y_A + c \\ y_A' = 3x_A - y_A + c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c' = 4 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$$

2. Exercice d'application

Le repère orthonorme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit p l'appliqué de E de E d'expression analytique

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

- 1- Déterminer l'image A' par p du pt $A(1, -2, 3)$
- 2- Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p
- 3- Démontrer que l'ensemble des pts invariants par p est un plan (P) .
- 4- Soit M un pt de E et M' son image par p
 - a) Démontrer que M' appartient à (P) .
 - b) Démontrer que si M' n'appartient à (P) alors la droite (MM') est orthogonale à (P) .
- 5- Décider la nature de p

Solution

- 1- Déterminons l'image A' par P du pt $A(1, -2, 3)$.

$$\begin{aligned} P(A) = A' \quad \Rightarrow \quad & \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2 \times 1 - 2 - 3 - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(1 + 2 \times (-2) + 3 + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-1 - 2 + 2 \times 3 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \\ \text{Soit } A'(x', y', z') \quad & \end{aligned}$$

D'où $A'(-2, 1, 0)$

2. Déterminons l'ensemble des antécédents de A' par P
 $P(M) = A' \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(2x+y-z-3) = -2 \\ \frac{1}{3}(x+2y+z+3) = 1 \\ \frac{1}{3}(-x+y+2z-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z-3 = -6 \\ x+2y+z+3 = 3 \\ -x+y+2z-3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z = -3 \quad (1) \\ x+2y+z = 0 \quad (2) \\ -x+y+2z = 3 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow x+2y+z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z = -3 \\ x+2y+z = 0 \\ x+2y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z = -3 \quad (4) \\ x+2y+z = 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow x+2y+z = 0 \Rightarrow x = -2y-z$$

$$(4) \Rightarrow 2(-2y-z) + y - z = -3 \Rightarrow -4y - 2z + y - z = -3$$

$$\Rightarrow -3y - 3z = -3 \Rightarrow y+z = 1 \Rightarrow y = 1-z$$

$$\text{On a : } x = -2(1-z) - z = -2 + 2z - z = -2 + z \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z = -3 \\ x+2y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+z \\ y = 1-z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = z \\ y-1 = -z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'M} = z \vec{u} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'ensemble des antécédents est la droite passant par A' de vecteur directeur $\vec{u}$ dont $\begin{cases} 2x+y-z = -3 \\ x+2y+z = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de cette droite

3^o Démontrons que l'ensemble des pts invariants par p est un plan

$$P(M) = M \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 3x \\ x + 2y + z + 3 = 3y \\ -x + y + 2z - 3 = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ -x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y + z + 3 = 0$$

Donc l'ensemble des pts invariants est le plan P .

l'équation $x - y + z + 3 = 0$

4^o a) Démontrons que le pt M' appartient à D ie que les coordonnées (x', y', z') vérifient l'équation de P

$$\begin{aligned} x' - y' + z' + 3 &= \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) - \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) + 3 \\ &= \frac{1}{3}(2x + y - z - 3 - x - 2y - z - 3 - x + y + 2z - 3 + 9) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $M' \in P$

b) Montrons que si M' appartient pas à P la droite (MM') est orthogonale à (P)

Supposons que $M \in P$ On a : $MM' \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3 - 3x) = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ y' - y = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3 - 3y) = \frac{1}{3}(x - y + z + 3) \\ z' - z = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3 - 3z) = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ \frac{1}{3}(x - y + z + 3) \\ \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posons $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur normale à P
 $\overrightarrow{MM'}$ étant colinéaire à $\vec{n}$ donc $(\overrightarrow{MM'})$ est orthogonale au plan P

5°) On en déduit que P est la projection orthogonale sur le plan.

Exercice

On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (D) la droite de E de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + d \\ y = 3 - 2d \\ z = -d \end{cases}$$

et $(\vec{u})$ le plan vectoriel d'équation

$x + y + 2z = 0$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie S par rapport à (D) parallèlement à $(\vec{u})$.

Soit $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ tel que

$S(M) = M'$ soit I milieu $[M; M']$; $I \in (D)$.

$$I \left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2}, \frac{z' + z}{2} \right)$$

$$I \in (D) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x' + x}{2} = 1 + d \\ \frac{y' + y}{2} = 3 - 2d \\ \frac{z' + z}{2} = -d \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x' + x = 2 + 2d \\ y' + y = 6 - 4d \\ z' + z = -2d \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = -x + 2 + 2d \\ y' = -y + 6 - 4d \\ z' = -z - 2d \end{cases} \quad (3)$$

$$\vec{MM'} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} \in (\vec{u}) \quad \begin{cases} x' - x = -2x + 2 + 2d \\ y' - y = -2y + 6 - 4d \\ z' - z = -2z - 2d \end{cases}$$

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (D) \\ \vec{MM'} \in \vec{u} \end{cases}$$

$$\vec{MM'} \in (\vec{n}) \quad (1) \quad -2x + 2 + 2d - 2y + 6 - 4d - 4z - 4d = 0 \quad (2)$$

$$-2x - 2y - 4z + 8 - 6d = 0 \quad (2) \quad 6d = -2x - 2y - 4z + 8 \quad (2)$$

$$d = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}$$

En remplaçant d par sa valeur dans (1) on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-5x - 2y - 4z + 14) \\ y' = \frac{1}{3}(4x + y + 8z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 8) \end{cases}$$