

Travaux Dirigés		
Prof : M. AG	Classe : TSE	2024 - 2025

Dénombrement-Probabilité Géométrie plane & Géométrie dans l'espace

Exercice 01

Soit f la transformation du plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ définie analytiquement par : à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$$

- 1) On pose $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$. Montrer que $Z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{Z} + 1$.
- 2) On pose $O' = f(O)$. Vérifier que $O'M' = OM$.
- 3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

Exercice 02

Le plan affine E est rapporté au repère orthormé (O, I, J) on considère l'application affine f de E dans E qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ y' = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Montrer que f est une projection et trouver ses éléments caractéristiques.

Exercice 03

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la transformation T qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M'

de coordonnées $(x'; y')$ vérifiant : $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1. Prouve que T est une similitude dont tu détermineras le rapport.
2. T est-elle une similitude directe ou indirecte ?
3. Détermine l'ensemble des points invariants par T .
4. Que peux-tu en déduire quant à la nature de T ?

Exercice 04 : Extrait de bac 2013 SET

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit T_α l'application de P vers P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \text{ où } \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$

1°/ Montrez que, pour tout α , T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera. **(1pt)**

2° / Montrez qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport. **(1pt)**

3° / Montrez qu'il existe 2 valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. Vérifiez que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les note R et R^{-1} . **(1pt)**

Exercice 05

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A' \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$;

$B' \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $C' \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit f l'application affine du plan tel que :

$$f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C'$$

- 1) Montrer que f est bijective
- 2) Déterminer l'expression analytique de f .

Exercice 06

On considère dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

- 1) Démontrer que $f \circ f = \text{Id}$
- 2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
- 3) Soit M un point du plan et M' son image par f .
 - a) Démontrer que le milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D) .
 - b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D) .
 - c) En déduire les éléments caractéristiques de f .

Exercice 07

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le

point M' de coordonnées (x', y') telles que :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

- 1.) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
- 2.) Démontrer que $f \circ f = \text{Id}$
- 3.) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
b.) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 08

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, (Δ_1) et (Δ_2) les droites d'équations respectives

$$2x + 3y - 4 = 0 \text{ et } x - y + 1 = 0.$$

- a.) Vérifier que (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas parallèles
- b.) Donner un vecteur directeur de (Δ_2)
- c.) Donner une expression analytique de la projection de P de (Δ_2) sur (Δ_1) .

Exercice 09

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On considère

L'application f de P dans P ayant pour expression analytique $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

- 1) a) Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
b) Quelle est nature de $f \circ f$?
- 2) Déterminer l'image par f de chacune des figures suivantes:
 - a) La droite (Δ) d'équation : $2x - y + 3 = 0$
 - b) Le cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
- 3) Montrer que l'ensemble des points du plan invariants par f est une droite (D) dont on donnera une équation.
- 4) Montrer que f est une isométrie.
- 5) Quelles sont les coordonnées des O', I', J' images respectives des points O, I, J par f

Exercice 10

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (5 + 4i)z + 3\bar{z} + 2 + 4i$
 f est-elle une application affine ?

Exercice 11

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère une similitude indirecte S d'écriture complexe $z' = (\sqrt{3} + i)\bar{z}$.

1. Démontre que $S = S \circ S_{(D)}$ où $S_{(D)}$ est la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$ et S une similitude directe dont tu donneras les éléments caractéristiques.
2. Détermine l'image de la droite (AB) où A et B sont des points d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-i$.

Exercice 12 : Extrait du Bac C Côte d'Ivoire 1995

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit a un réel strictement positif. On considère le point A de coordonnées $(a; 0)$ et $B(a; a)$. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose : $F = R' \circ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ? Précise ces éléments caractéristiques. (On pourra considérer l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$).
2. Soit (D) la droite d'équation $x + y = a$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D) .
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $S_{(D)} \circ F$.

Exercice 13

un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $|(1 + i)z - 2i| = 2$
2. Quelle est la nature de la transformation F qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe $z' = (1 + i)z - 2i$.
3. Déterminer les éléments géométriques de cette transformation.

Exercice 14

Dans le plan complexe orienté, muni du repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation T qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2(1 - i)\bar{z} + \frac{7i}{2}$.

1. Démontrer que T est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie dont le centre Ω appartient à l'axe Δ de la symétrie.
2. Déterminer Ω , Δ et le rapport de l'homothétie.