

COURS PRIAMS



PREPABAC 2025

MATHEMATIQUES



Thème 1 : " Equations Diophantiennes "

**Opération un exercice par jours
sur les équations Diophantiennes...**

M. MOUHAMAD SARRE

70647469 / 65360170

Exercice 1 : Lundi

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x + 47y = 1$.

- 1) Justifie que (E) admet au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- 2) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, détermine une solution particulière de (E) .
- 3) Détermine l'ensemble des solutions de l'équation (E) .
- 4) Pendant son séjour à Bamako pour ses affaires, M. COULIBALY a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 13.000 F CFA et une nuit en hébergement B coûte 47.000 F CFA. Le coût total de sa réservation a été de 524.000 F CFA. Détermine le nombre de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

Exercice 2 : Mardi

On considère l'équation (E) définie par : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, 35x - 27y = 2$.

- 1) a) Vérifie que $(-20 ; -26)$ est solution de (E) .
b) Démontre que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant :
 $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) Dans un village il y a deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen**. Détermine le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.

M. SARRE

70647469

65360170

Exercice 3 : Mercredi

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$.

- 1) a) Montre que cette équation admet au moins une solution.
b) Montre que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 21x \equiv 4[17]$.
- 2) On se propose de résoudre l'équation (E') .
On rappelle qu'un entier relatif a est l'inverse de modulo n ($n \in \mathbb{N}$) d'un entier relatif b si $ab \equiv 1[n]$.
a) Détermine l'inverse modulo 17 de 21.
b) Montre que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k ; k \in \mathbb{Z}$.
En déduis l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 4 : Jeudi

x et y désignent des entiers relatifs.

- 1) Montre que l'équation $(E) : 65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
- 2) Montre que l'équation $(E') : 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
- 3) Détermine, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .
- 4) Résous l'équation (E') .
- 5) En déduis qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.
- 6) Pour tout entier naturel a , démontre que, si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

Exercice 5 : Vendredi

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x - 2y = 1$.
a) Montre que cette équation est équivalente à $(E') : 5x = 1[2]$.
b) Résous l'équation (E') .
c) En déduis les solutions de l'équation (E) .
- 2) Pour tout entier naturel non nul n , on considère les nombres $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.
a) Montre que $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(n - 8; 10)$.
b) En déduis que si a et b ne sont pas premier entre eux alors leur plus grand commun diviseur est 19.
- 3) On rappelle que si $\text{pgcd}(a; b) = d$ alors il existe k et k' tels que $a = kd$ et $b = k'd$.
Montre que k et k' vérifient la relation $5k - 2k' = 1$.
- 4) En se servant de la question 1, détermine k et k' .
- 5) En déduis que les entiers n tels que $\text{pgcd}(a; b) = 19$ sont de la forme $n = 8 + 19p$.

Exercice 6 : Samedi

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle $x : 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

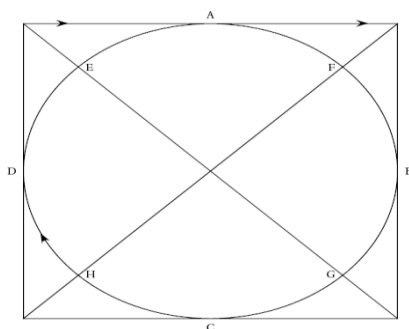
1) On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

- Prouve que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.
 - Utilise l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifie que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.
 - En déduis un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$. Donne la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
 - Détermine, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
- 2) a) Décompose 78 et 14 en facteurs premiers. En déduis, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
- b) Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue $x : 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs. Montre que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.
- c) En déduis le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice 7 : Dimanche

1) On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

- Vérifie que le couple $(9; 6)$ est solution de l'équation (E).
 - Résous l'équation (E).
- 2) Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma.



M. SARRE

70647469

65360170

Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes.

Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes. Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

- On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t , on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montre que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.
- Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?
- Montre, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.
- Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

**Traçons des exercices
pour ne pas oublier!!!**