

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

101.

1. n désigne un entier naturel.

a. Vérifier que, pour $n = 15$, le reste de la division euclidienne de $(n + 2)^3$ par n^2 est égal à $12n + 8$.

b. Déterminer tous les entiers n pour lesquels cette propriété est vraie.

2. Existe-t-il des entiers naturels n tels que $(n + 1)^3$ ait pour reste $n^3 + 1$ dans la division par 3 ?

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que, si n^3 et n^2 ont le même reste dans la division par 7, alors ce reste ne peut être que 0 ou 1.

4. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , 2^{3n+1} a pour reste 2 dans la division par 7.

102.

Voici quelques exercices qui tournent autour du nombre 2005 :

1. Déterminer les diviseurs positifs de 2005.

2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $a^2 - b^2 = 2005$.

3. **Vrai ou faux ?** L'équation $28x + 29y + 30z + 31t = 365$ n'a pas de solutions dans $\mathbf{N}^4$.

4. Montrer que, s'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2 + b^2 = 2005$, ces deux entiers ne sont pas de même parité.

5. Montrer que, s'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2 + b^2 = 2005$, aucun d'eux n'est divisible par 5.

6. Montrer que, s'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2 + b^2 = 2005$, ces nombres sont **premiers entre eux** (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1).

7. **Vrai ou faux ?** L'équation $9x - 12y = 2005$ n'a pas de solutions dans $\mathbf{Z}^2$.

103.

1. n désigne un entier naturel.

a. Démontrer que les entiers $n^2 + 3n + 2$ et $n^2 + 5n + 4$ sont divisibles par $n + 1$.

b. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

c. En déduire que, quel que soit n , $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

2. a, b, c et d sont des entiers naturels.

a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

b. La réciproque est-elle vraie ?

3. Déterminer le reste de la division de $366^{2004} + 365^{2005}$ par 7.

4. a. Déterminer le reste de la division de 2002 par 7.

b. Déterminer le reste de la division de 10000 par 7.

c. Déduire de ce qui précède le reste dans la division par 7 du nombre 2002200320042005.

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

104.

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$, etc...

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue $a : a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 - a. Montrer que si a existe, a est impair.
 - b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
 2. Étude de l'équation d'inconnue $a : a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
 - a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
 - b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
 - c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.
 3. Étude de l'équation d'inconnue $a : a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation est impossible si n est impair.
 - b. On pose $n = 2p$. En s'inspirant de 2. c., démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.
-

105.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^4 - 20x^2 + 4$.
 - a. Montrer que $f(x)$ est positif si $x \geq 5$.
 - b. Vérifier que $f(x) = (x^2 - 2)^2 - 16x^2$.
 - c. En déduire que $f(x) = P(x) \times Q(x)$ où P et Q sont deux fonctions polynômes de degré 2.
 - d. Démontrer que les équations $P(x) = 1$ et $Q(x) = 1$ n'ont pas de solutions entières.
 - e. En déduire que le nombre $n^4 - 20n^2 + 4$ n'est premier pour aucun entier naturel n supérieur ou égal à 5.
 2. On considère la fonction $g : x \mapsto x^4 + 64$.
 - a. En remarquant que $g(x) = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2$, factoriser $g(x)$ sous la forme $P(x) \times Q(x)$ où P et Q sont deux fonctions polynômes de degré 2.
 - b. En procédant comme à l'exercice 1, montrer que le nombre $n^4 + 64$ n'est premier pour aucun entier naturel n .
-

106.

1. Soit a un entier relatif quelconque.
Déterminer toutes les valeurs du reste de la division euclidienne de a^4 par 5.
 2. Démontrer que l'on a, pour tout entier relatif a : $a^5 - a$ est multiple de 10.
 3. On considère deux entiers naturels a et b , avec $a > b$, tels que les entiers a^5 et b^5 aient le même chiffre des unités dans le système de numération décimale.
Démontrer que $a - b$ est divisible par 10 et que $a^2 - b^2$ est divisible par 20.
 4. Les hypothèses de la troisième question sont maintenues. Calculer les entiers a et b de telle façon que l'on ait : $a^2 - b^2 = 1\,940$.
 5. Même question pour $a^2 - b^2 = 1\,920$.
On vérifiera dans ce cas que le problème admet plusieurs solutions et on donnera toutes les solutions.
-

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

107.

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
 - a) Montrer que M et N sont des entiers impairs.
 - b) En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N .
 2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.
 - a) Montrer que M et N sont des entiers pairs.
 - b) En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N .
 3. Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'entier $81n^2 - 1$.
 - a) Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N .
 - b) Démontrer que si n est pair alors $81n^2 - 1$ est impair.
 - c) Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.
-

108.

On désigne par a le réel $\sin \frac{\pi}{18}$.

1. Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ (on utilisera certaines formules de duplication et d'addition).
 2. Montrer que a est solution de l'équation $8x^3 - 6x + 1 = 0$.
 3. On suppose a rationnel. Il s'écrit donc sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels premiers entre eux.
 - a) Montrer que p et q vérifient l'égalité $6pq^2 - 8p^3 = q^3$.
 - b) En déduire que q est pair. On pose alors $q = 2q'$.
 - c) Montrer que p et q' vérifient l'égalité $p(3q'^2 - p^2) = q'^3$.
 - d) En déduire que $p = 1$.
 - e) Montrer que q' vérifie l'égalité $q'^2(3 - q') = 1$.
 - f) Montrer qu'il n'y a aucune solution possible pour q' .
 - g) Que peut-on en conclure pour a ?
-

109.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.
 - a) Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - b) Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
 - c) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{2004} par 7.
 - d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
 - e) En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
 2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - a) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.
-

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

110.

Un entier naturel N dont le **nombre** des dizaines est noté D et dont le **chiffre** des unités est noté u , s'écrit $N = 10D + u$.

On considère le nombre $N' = D + 2u$.

1. Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

N est divisible par 19,

N' est divisible par 19.

En utilisant plusieurs fois de suite cette équivalence, étudier si le nombre 29 431 est divisible par 19.

2. Dans cette question, on fixe $u = 3$.

Montrer que le PGCD de N et N' est un diviseur de 57.

Est-il possible que ce PGCD soit égal à 57 ? Si oui, donner une valeur de D qui convient et les valeurs correspondantes de N et N' .

111.

VRAI OU FAUX ? (Ne pas oublier de justifier chaque réponse)

1. Deux naturels ont leur PGCD égal à 16 et le plus grand d'entre eux est 144.

Alors l'autre nombre peut prendre 6 valeurs différentes.

2. Un entier est divisible à la fois par 6 et par 10, alors :

a) il est divisible par 2.

b) il est divisible par 3.

c) il est divisible par 4.

d) il est divisible par 5.

e) il est divisible par 30.

f) il est divisible par 60.

3. Pour tout entier naturel n , la fraction $\frac{n+3}{2n+5}$ est irréductible.

4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, le PGCD des entiers $A = 2^{n+2} - 2^n$ et $B = 3^{n+2} - 3^n$ est 24.
-

112.

VRAI OU FAUX ? (Ne pas oublier de justifier chaque réponse)

1. a) Pour a entier supérieur ou égal à 2, a^2 et a^3 ne sont pas premiers entre eux.

b) L'équation $11x - 19y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

c) Si 2 divise $7n$, avec n entier, alors n est pair.

d) Le PGCD de deux entiers pairs consécutifs est égal à 4.

e) Le PPCM de deux nombres premiers distincts est égal à leur produit.

f) Soit a et b des entiers tels que $3a + 5b = 6$. Le PGCD de a et b est 6.

g) Si 6 divise a et 10 divise b , alors le PPCM de a et b est divisible par 60.

h) Soit a et b des entiers tels que $7a + 8b = 1$; alors le PGCD de a et b est égal à 1.

2. Il n'existe pas cinq naturels a, b, c, d et e (avec $a \leq 100$) qui soient termes consécutifs d'une suite arithmétique, de raison un entier strictement supérieur à 1 et premier avec a , et vérifiant $6a^2 = e - b$.
-

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

113.

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b .

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.
 2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d .
 3. **a)** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.
b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.
 4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r , d est-il égal à 1 ?
-

114.

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier.

Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbf{N}$:

$$(E) \quad n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbf{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994.
En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

115.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .
a) Établir une relation entre α et β indépendante de n .
b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. **a)** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a et b .
b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

116.

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :
$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

117.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .

e) Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

118. Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que tout diviseur de A qui divise n , divise 2.

3. Montrer que tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.

4. Dans cette question, **on suppose que n est impair**.

a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b) Montrer que d divise n .

c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. **On suppose maintenant que n est pair**.

a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c) Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

119.

1. Déterminer PGCD (2 688 ; 3 024).
 2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
 - a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

$$(1) \quad 2\,688x + 3\,024y = -3\,360 ;$$

$$(2) \quad 8x + 9y = -10.$$
 - b) Vérifier que $(1 ; -2)$ est une solution particulière de l'équation (2).
 - c) Dédire de ce qui précède les solutions de (2).
 3. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$
 - a) Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
 - b) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).
 - c) En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
-

120.

1. Le but de cette partie est de trouver les valeurs de l'entier relatif q pour lesquelles $\frac{3}{2} + \frac{1}{q}$ est un nombre entier.
 - a) En remarquant que $\frac{3}{2} + \frac{1}{q} = \frac{3q+2}{2q}$, montrer que q est pair.
 - b) On pose $q = 2q'$, avec q' entier relatif. Montrer que $|2q'| = \text{PGCD}(q' + 1, 2)$.
 - c) En déduire les valeurs de q' puis celles de q .
 2. Le but de cette partie est de déterminer la somme des diviseurs d'un entier naturel qui se décompose sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta$.
Étude d'un cas particulier :
 - a) Combien le nombre $2^5 \times 3^4$ a-t-il de diviseurs positifs ?
 - b) En écrivant la liste de ses diviseurs sous la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 2^2, & \dots, & 2^5, \\ 1 \times 3, & 2 \times 3, & 2^2 \times 3, & \dots, & 2^5 \times 3, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ 1 \times 3^4, & 2 \times 3^4, & 2^2 \times 3^4, & \dots, & 2^5 \times 3^4, \end{array}$$
 calculer la somme des termes de chaque ligne en utilisant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique puis montrer que la somme des diviseurs positifs, de $2^5 \times 3^4$ est 7623.**Étude du cas général :**
 - c) Combien le nombre $2^\alpha \times 3^\beta$ a-t-il de diviseurs positifs ?
 - d) Montrer, en utilisant la méthode précédente que la somme de ses diviseurs positifs est :

$$\frac{(2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1)}{2}.$$
 3. Le but de cette partie est de déterminer les nombres parfaits de la forme $2^\alpha \times 3^\beta$.
Définition : Un entier naturel est dit **parfait** si et seulement si ce nombre est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.
Exemple : 28 est parfait puisque $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.
 - a) Montrer que $2^\alpha \times 3^\beta$ est parfait si et seulement si : $2^\alpha = \frac{3 \times 3^\beta - 1}{2(3^\beta - 1)}$.
 - b) En remarquant que $\frac{3 \times 3^\beta - 1}{2(3^\beta - 1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3^\beta - 1}$, montrer, en utilisant le résultat de la première partie, qu'il existe un seul nombre parfait de la forme $2^\alpha \times 3^\beta$. Lequel ?
-