

Exercices d'entraînement : TSE 2017 - 2018

Arithmétique Fiche n°1 :

Exercice n°1 :

Démontrer par récurrence que :

$$1 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$2 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$3 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}; 4 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1.$$

$$5 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; a \in \mathbb{R}; (1+a)^n > (1+na) \text{ si } a > 0.$$

$$6 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2; \text{ en déduire } S = \sum_{k=12}^{20} k^3.$$

$$7 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^+; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \text{ on pose } u_0 = 2 \cos \theta \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

a) Calculer les trois premiers de la suite (u_n) .

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^+; u_n = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right)$.

Exercice n°2 :

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. b) $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

c) $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.

2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $5^{2n} - 3^n \equiv 0 [11]$; b) $7^n - 1 \equiv 0 [6]$; c) $3^{2n} - 2^n \equiv 0 [7]$

d) $3^{2n+3} - 2^{n+3} \equiv 0 [7]$ e) $10^{6n} + 10^{3n} - 2 \equiv 0 [111]$

f) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 [17]$

Exercice n°3 :

Les cinq questions sont indépendantes.

1) Soit n un entier relatif. En vérifiant que $2n + 1 = 2(n - 3) + 7$; trouver l'ensemble des entiers n tels que $(n - 3)$ divise $(2n + 1)$.

2) Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que $3n+24$ soit divisible par $n-4$.

3) Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que $(n + 1)$ divise $(n^2 - n + 3)$.

4) Déterminer les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ peut se simplifier sous forme d'un entier relatif.

34 32 34 / 66 34 32 34

- 5) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$.

Exercice n° 4 :

- 1) Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
- 3) En déduire que pour tout n , $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice n° 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que quel que soit n , $3n^4 + 5n + 1$ est impair ; puis que ce polynôme n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Exercice n° 6 : Une propriété de la division euclidienne

a et b sont deux entiers naturels. Dans la division euclidienne de a par b , le quotient n'est pas nul. Prouver que a est supérieur au double du reste.

Exercice n° 7 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation : $x^2 - y^2 = 24$.
- 2) Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $x^2 - y^2 = 13$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{N}^i \times \mathbb{N}^i$ l'équation : $(x-3)(y-4) = 900$.

Exercice n°8 :

- 1) Soit $a = 5012$ en base 7. Ecrire a en base 2.
- 2) Soit $b = 2183$. Ecrire b dans le système octal.
- 3) c s'écrit 23 dans le système décimal et $\overline{27}$ dans un système de base a . Que vaut a ?
- 4) Dans le système de numération de base trois, un entier N s'écrit $\overline{2101}$. dans quel système de numération de base x ce nombre s'écrit-il $\overline{224}$?
- 5) Dans quelle base a-t-on $\overline{23} + \overline{56} = \overline{101}$?
- 6) a) Dresser les tables d'addition et de multiplication dans le système de numération de base deux
b) les nombre sont écrits en base deux, effectuer les opérations suivantes:
 $1011 + 111$ et 1101×11 .
- 7) a) Dresser les tables d'addition et de multiplication dans le système de numération de base cinq.
b) les nombre sont écrits en base cinq, effectuer les opérations suivantes:

$3042 + 123$; $3421 + 240$; 142×23 ; 3421×230 .

Exercice n°9 :

**Par faute d'action de
gens biens le mal**

34 32 34 / 66 34 32 34

- 1) Déterminer le chiffre x pour que l'entier naturel qui s'écrit $53x2$ en base dix soit divisible par 9.
- 2) Déterminer le chiffre y pour que $53y4$ en base 10 soit divisible par 3 et 4.
- 3) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier naturel qui s'écrit $x43y$ en base dix soit divisible par 2 et 9.
- 4) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier naturel qui s'écrit $3xy68$ en base dix soit divisible par 9 et 11.

Exercice n°10 :

On considère l'entier naturel représenté en base b par $N = 342x$. Déterminer x pour que N soit :

- 1) Divisible par 5 quand $b=6$.
- 2) Divisible par 3 quand $b=7$.
- 3) Divisible par 12 quand $b=17$.

Exercice n°11 :

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans le système de numération de base treize est $\overline{25x3}$.

- 1) Pour quelles valeurs de x , l'entier N est divisible par 6? divisible par 4?
- 2) En déduire la ou les valeur (s) de x pour que N soit divisible par 24.

Exercice n°12 :

- 1) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360.
- 2) En déduire la résolution dans N de $b^3[b^2+(b+1)^2]=18360$.
- 3) Existe-t-il un entier naturel b tel que le nombre qui s'écrit 36723 dans le système décimal, s'écrive $\overline{442003}$ dans le système de base b ?

Exercice n°13 :

- 1) Déterminer, suivant les valeurs de n , les restes de la division euclidienne de 4^n et 5^n par 7.
- 2) Résoudre alors dans N , l'équation en x : $100+102^x+103^x \equiv 0[7]$.

Exercice n°14 : composition 1997

- 1) On sait que : $10^3-1=9 \times 111$
 $10^3+1=7 \times 11 \times 13$

Pour tout entier naturel, on considère le nombre $A=10^{9n}+2 \times 10^{6n}+2 \times 10^{3n}+1$.

Déterminer le reste de la division de A par 111.

- 2) On suppose n impaire. Démontrer que A est divisible par 7, par 11, par 13.
- 3) On suppose n pair
 - a) Déterminer que $A-6$ est divisible par 11, par 7, par 13.
 - b) Quel est le reste de la division de A par 111×1001

Exercice n°15 :

- 1) Etablir que... $\forall (a, b, q) \in \mathbb{Z}, a \wedge b = b \wedge (a - bq)$. la notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b .
- 2) Montre que $\forall n \in \mathbb{Z}; (5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$.
- 3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n+2)$ divise $(5n^3 - n)$.

**Par faute d'action de
gens biens le mal
trionphe !**

34 32 34 / 66 34 32 34

- 4) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n+2)$?
5) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$.

Exercice n°16 :

- 1) Résoudre dans $N^i \times N^i$: $a \begin{cases} x+y=84 \\ x \wedge y=12 \end{cases} ; b \begin{cases} x^2-y^2=5440 \\ x \wedge y=8 \end{cases}$.
2) Résoudre dans $N^i \times N^i$: $a \begin{cases} x \vee y=180 \\ x \wedge y=90 \end{cases} ; b \begin{cases} x \vee y=30 \\ x \wedge y=7 \end{cases}$.
3) Résoudre dans $N^i \times N^i$: $\begin{cases} x \wedge y=6 \\ xy=2700 \end{cases}$
4) $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant :
 $a \begin{cases} m+10d=142 \\ x \leq y \end{cases} ; b \begin{cases} m-d=77 \\ 0 < x < y \end{cases}$.
 $c \begin{cases} d+m=y+9 \\ d \wedge m-16d=1977 \end{cases}$.

Exercice n°17 :

- I. 1) vérifier que le couple $(7; 24)$ est solution de l'équation : $(E) : 55x - 16y = 1$.
2) En déduire l'ensemble des couples $(x; y) \in Z^2$ qui sont solutions de (E) .
II. 1) vérifier que 700 et 429 sont étrangers.
2) Déterminer tous les couples $(x; y) \in Z^2$ tels que $700x + 429y = 1$.

Exercice n°18 :

- 1) Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525
2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs pour lesquels $34x \equiv 2[15]$
3) Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation $21590x + 9525y = 1270$

Exercice n°19 :

- b est un entier strictement positif supérieur à 1. On rappelle que $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$
1) Quel est le PGCD de b^2 et $(b-1)$?
2) Quel est l'ensemble des solutions dans $Z \times Z$ de l'équation $b^2x + (b-1)y = 1$?
APPLICATION NUMERIQUE : Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation $9x + 2y = 1$

Exercice n°20.

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

- 1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ? si oui, exprimer ce temps en heures.
2) Préciser le nombre de tours effectué par chaque voiture pendant ce laps de temps.

Exercice n°21.

On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres.

- a) Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

**Par faute d'action de
gens biens le mal**

34 32 34 / 66 34 32 34

b) Déterminer alors le nombre total de dalles qu'il faut pour recouvrir cette surface.

Exercice n°22:

Un document rédigé comporte 4350 lignes sur plusieurs pages. Une page complète comporte 34 lignes et seule la dernière page est éventuellement incomplète. Calcule le nombre de lignes figurant sur la dernière page. Donner alors le nombre de lignes qu'il faut pour compléter la dernière page et le nombre total de pages utilisées par ce document.

ASD
A