

Exercices et Problèmes :
Chap. Arithmétique

Exercice1 : Démontrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4, 2^n \geq n^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^3 - n$ est multiple de 3
6. $\forall n \in \mathbb{N}, n^7 - n$ est un multiple de 7.
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1) \times (n+2) \times \dots \times 2n$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! \geq \sum_{i=1}^n i!$
10. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n i \times i! = (n+1)! - 1$
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
12. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
13. $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, a \in \mathbb{R}_+^*, (1+a)^n > 1+na$

Exercice2 :

1. Déterminer dans quelle base a , on a l'égalité suivante : $\overline{324} + \overline{256} = \overline{613}$. Dans cette base, donner la table d'addition et de multiplication.
2. L'expression d'un entier naturel n au moyen d'une certaine base de numération b est : $\overline{1254}$. On sait de plus que l'expression de l'entier $2n$ dans la même base est $\overline{2541}$.
2. a. Déterminer les valeurs de b et n en base 10.
b. Donner les expressions en base b des entiers $3n$ et $4n$.
3. Les entiers $\overline{cb}, \overline{bc}, \overline{ac}$ sont écrits dans le système à base dix. Détermine les chiffres a, b et c sachant que :

$$\begin{cases} a+b+5c+3 = \overline{cb} \\ \overline{bc} - \overline{ac} = 10c \end{cases}$$

Exercice3 :

1. a. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $5x - 11y = 4$.
b. En déduis la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} 3\alpha \equiv 1[5] \\ 7\alpha \equiv 9[11] \end{cases}$
2. Trouver les couples $(x; y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient : $3m - 2d = 30$.
3. Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n , $A_{n+3} \equiv A_n[7]$
b. Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0[7]$
c. Les nombres $\alpha = \overline{1110^2}; \beta = \overline{1010100^2}; \lambda = \overline{1001001000^2}$ sont-ils divisibles par 7. (d'après Bac SET-MTI-MTGC session oct.2012)

Exercice4 : On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1. Déterminer un couple $(\alpha; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation : $23\alpha + 7\beta = 1$.
2. En déduis un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation $(E) : 23u - 7v = -6$. Résous complètement l'équation (E) .

3. Démontrez que x est solution de l'équation (S) si et seulement s'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$. En déduisez l'ensemble des solutions de (S) .
4. Déterminez la plus petite solution de (S) divisible par 16. (d'après Bac TSE-STI 2014)

Exercice5 :

1. Résolvez dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.
2. a. Trouvez le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier n .
b. Soit l'entier naturel $N = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$. Montrez que N peut s'écrire en fonction de 111. Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ? (d'après Bac SET-MTI-MTGC 2013)

Exercice6 : Deux commerçantes Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque manque coûte 5 francs l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 et Fanta répond, moi j'ai une somme de m_2 francs. L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminez les chiffres x et y pour que chacune des commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
2. Déterminez le montant dont dispose chacune des commerçantes. En déduisez le nombre de manques que chacune d'elles peut acheter.
3. a. Décomposez m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.
b. En déduisez le nombre de diviseurs de m_1 et de m_2 puis $\text{pgcd}(m_1, m_2)$.
4. Résolvez dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont des entiers relatifs. (d'après Bac SET-MTI-MTGC2012)

Exercice7 : Le nombre entier naturel N qui s'écrit 341 dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}$ en base a .

1. a. Trouvez un encadrement de a^3 .
b. Déterminez a et vérifiez.
2. Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'entier $n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 12.
3. Montrez que si un nombre écrit en base 2 ne comporte que des chiffres 1 alors il est égal à une puissance de 2 diminuée de 1.

Exercice8 :

1. On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525m$ et $285m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculez :
a. La distance comprise entre deux arbres.
b. Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.
2. On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.
a. Vérifiez que le couple $(-7; -3)$ est une solution de (E) .
b. Résolvez l'équation (E) .
c. En déduisez le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$. (d'après Bac Mali TSE-STI 2016)

Exercice9 : α et β sont des entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N .

1. a. Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
b. Déduisez-en les valeurs de N
2. a. Déterminer les triangles OAB rectangles en O dont les 3 côtés sont mesurés par des entiers naturels, le côté OA ayant pour mesure 12 cm. Calculer $OB = n$ et $AB = n'$.
b. Parmi ces triangles lesquels sont semblables ?

Exercice10 : a et b sont deux entiers naturels tels que :

$$a^2 - 2b^2 = 1 \quad (1)$$

1. Démontrer les propriétés suivantes :
a. les entiers a et b sont premiers entre eux ;
b. a est impair ;
c. b est pair.
2. a. Déterminer, en s'aidant d'une calculatrice, quatre couples (a, b) d'entiers inférieurs à 100 vérifiant (1).
b. Démontrer que si (a, b) est un couple solution de (1) alors le couple (A, B) avec : $A = 3a + 4b$ et $B = 2a + 3b$ est encore solution de (1).
c. Trouver à l'aide de cette formule, un couple d'entiers supérieurs à 1000 vérifiant (1).

Exercice11 : On considère l'entier représenté base en b par $n = \overline{342x}^b$. Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit :

1. Divisible par 5 quand $b = 6$
2. Divisible par 3 quand $b = 7$
3. Divisible par 12 quand $b = 17$

Exercice12 : Trouver les restes de la division euclidienne par 9 de 7^n où $n \in \mathbb{N}$. En déduis le reste de la division euclidienne par 9 de 7^{1997} .

Exercice13 : Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- le premier chiffre est pair ;
- la somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- le 3^{ème} chiffre est la différence des deux premiers (le 1^{er} moins le 2^{ème}) ;
- le premier chiffre est le produit du 3^{ème} par le 4^{ème} ;
- Le nombre est divisible par 9. Quelle est la combinaison ? (d'après Bac Mali 2014)

Exercice14 :

1. Trouver 3 entiers naturels a, b, c différents de 1 et étrangers deux à deux tels que : $abc = 495$.
2. x, y, z étant des chiffres de la base 10, on considère un nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base 10. Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour que A soit un multiple de 495.

Exercice15 : 1. Trouver tous les paires d'entiers naturels (a, b) tel que l'on ait :
$$\begin{cases} PGCD(a, b) = 42 \\ PPMC(a, b) = 1680 \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tel que : $8x \equiv 7[5]$
3. Résoudre l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $336x + 210y = 294$.

Exercice16 : Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a + b; ab) = p$, où p est un nombre premier.

1. a. Démontre que p divise a^2 . On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$.
- b. En déduis que p divise a . On constate de même que p divise b .
- c. Démontre que $PGCD(a; b) = p$.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résous le système suivant :
$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPMC(a; b) = 170 \end{cases}$$

b. En déduis la solution du système :
$$\begin{cases} PGCD(a + b; ab) = 5 \\ PPMC(a; b) = 170 \end{cases}$$

Exercice17 :

1. Établis que $\forall (a, b, q) \in \mathbb{Z}^3, a \wedge b = b \wedge (a - bq)$.
2. Montre que $\forall n \in \mathbb{Z}, (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$.
3. Quelles sont les valeurs possibles du $PGCD$ de $5n^3 - n$ et $n + 2$?
5. Détermine l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 2$.

Exercice18 : 1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier n , les restes de la division euclidienne par 7 de 5^n .

2. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 5^{136}

3. Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10. Déterminer x pour que l'on ait : $5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0[7]$.

Exercice19 : On appelle nombre triangulaire, tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2 + a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

1. Démontrez que si n est la somme de deux nombres triangulaires alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
2. On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ? Étudier la réciproque de la propriété (1.).

Exercice20 :

1. Déterminer le $PGCD$ de 21590 et 9525.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels $34x \equiv 2[15]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $21590x + 9525y = 1270$

Exercice21 :

1. Détermine, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n .
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k , on a :

$$1 + 13 + 13^2 + 13^3 + \dots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$$

3. On pose, pour tout entier naturel n , $A_n = 1 + 13 + 13^2 + 13^3 + \dots + 13^n$. Détermine suivants les valeurs de n , le chiffre des unités de A_n .

Exercice22 :

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entiers naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entiers naturel n , le reste de la division euclidienne de

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \text{ par } 7.$$

3. On considère le nombre B qui s'écrit dans le système de numération de base quatre comme $B = \overline{2103211}$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7.

Exercice23 :

1. a. Démontrez que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.
- b. En déduis 4 entiers consécutifs dont le produit est 5040.
2. Montrez qu'un carré parfait est congru soit à 0 modulo 4 ou à 1 modulo 4.
3. Montrez que le produit de cinq entiers consécutifs est divisible par 120.

Exercice 24 : Soit n un entier naturel, on pose $a = 2n + 8$ et $b = 3n + 15$, on note δ le $PGCD(a, b)$.

1. Montrez que pour tout entier naturel n , δ divise 6.
2. Déterminez l'ensemble S des entiers naturels n pour lesquels $\delta = 6$.

Exercice25 :

1. Trouve tous les entiers naturels n pour lesquels n , $n + 2$ et $n + 4$ soient tous des nombres premiers.
2. Montrez que pour tout entier naturel $n > 2$, si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
3. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontre que $PGCD(13a + 8b; 5a + 3b) = PGCD(a; b)$.
4. Démontre que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible alors il en est de même pour les fractions :

$$\frac{a+b}{ab}; \quad \frac{ab}{a^2+b^2}; \quad \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}; \quad \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Exercice26 : n étant un entier relatif quelconque, on pose : $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.

1. a. Montrer que le $PGCD$ de A et B est égal au $PGCD$ de A et 4.
- b. Déterminer suivant les valeurs de n le $PGCD$ de A et B .
2. Pour quelles valeurs de n , le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il entier relatif.

Exercice27 : Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul.

1. Montre que p et q^n sont premiers entre eux.
2. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (p et q sont premiers entre eux).
- a. Démontre que p divise a_0 et que q divise a_n .
- b. Factorise le polynôme : $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.
- c. Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$x^5 + 127x^4 - 12x^3 + x^2 + 7x - 1 = 0$$

Exercice28 :

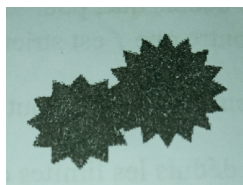
1. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $3x - 5y = 6$ b) En déduis dans $\mathbb{Z}^2$ la solution du système : $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
- a) $(x \wedge y) + (x \vee y) = y + 9$ b) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$ c) $(x \vee y) - 18(x \wedge y) = 791$
- d) $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}$

Exercice29 :

1. Dans une famille il y a 3 filles. La somme de leurs âges est 13 et le produit est 36.
- a. Étudier la parité des âges. b. Quels sont les âges ?
2. Une caravane composée d'hommes et de femmes fait halte dans un restaurant. Les hommes y dépensent 19 francs et les femmes 13 francs. La recette du restaurant est 1000 francs. Combien y a-t-il d'hommes et de femmes ?
- 3.

Exercice30 : 1. Un berger, à qui l'on demandait combien il avait de moutons, répondit : j'ai moins de 400. Soit qu'on les compte par huit, par sept ou par six, il en reste cinq. Mais en les comptant par onze, il n'en reste point. Combien en avait-il ?

2. Une roue d'engrenage (A) a douze dents (voir figure ci-dessous)



- a. Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?
- b. (A) est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position. Détermine le nombre de dents de la roue (C). (d'après Bac Mali TSE-STI 2019)

3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n, n+2, n+6, n+8, n+12$ et $n+14$ soient premiers.

Exercice31 : Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale $N = \overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

- Montre que si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N \equiv 0[7]$. En déduis que pour cette valeur de a , N est divisible par 7.
- Montre que $10N - 3a$ est divisible par 7. En déduis que si N est divisible par 7 alors $a = 7$.

Exercice32 : Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

- Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.
- Écris ce nombre dans le système de base 8.

Exercice33 : Soit $A = \frac{n+9}{n-6}$ une fraction où n est un entier supérieur à 6.

- Trouver des entiers a et b tels que : $A = a + \frac{b}{n-6}$.
- Déterminer n pour que A soit entier naturel.
- Déterminer l'entier n pour que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par 11.

Exercice34 : « Nombres amiables-Nombres parfait »

- « On appelle diviseurs strict d'un entier n tout diviseur de n positif autre que lui-même ». Déterminer les diviseurs stricts de 220.
- « On appelle nombre parfait tout nombre entier égal à la somme de ses diviseurs stricts ».
- Le nombre 28 est-il parfait ?
- Déterminer un nombre premier p tel que $2^4 \times p$ soit un nombre parfait.
- Soit n et p deux entiers naturels, tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n \times p$ soit parfait.
- Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme, pour $n < 10$.

Exercice35 : Soit a un entier strictement supérieur à 2. On considère les nombres $N = 2(a-1)$ et $N' = (a+1)^2$.

- Écris N et N' dans le système de base a .
- Démontrer que dans tout système de numération de base b (avec $b \geq 4$) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x .

Exercice36 :

- La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?
- Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.
- Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b . Sachant que $a+b+r = 3025$ et $q = 50$, rétablir la division.

Exercice37 :

- a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49
- En déduire que si l'entier n n'est pas multiple de 3 alors : $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.
- a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 2007^n par 5. En déduis le reste de la division euclidienne de 2^{2007} par 5.
- Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $2007^{n+13} \equiv 2[5]$.
- Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est $167cm$. La taille moyenne des filles est $160cm$ et la taille moyenne des garçons est $173,5cm$. Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60 ? (D'après Bac2014)

Exercice38 : Le proviseur d'un lycée dispose de 15 cahiers et de 25 bics. À l'aide de ces fournitures, il veut faire des lots identiques pour récompenser les plus méritants de ses élèves à la fin d'un trimestre.

- Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut former ?
- On suppose qu'il peut former 5 lots et qu'il a en tout 40 objets (bics et cahiers). Le nombre de cahier étant inférieur au nombre de bics, déterminer le nombre de cahiers et de bics.

Exercice39 : Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$.

- a. Écris S sous forme d'un quotient.
- Calcule l'expression $p^n + (1-p)S$ et en déduis que p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux.
- a. Résous, dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $p^n x - (1-p)y = p$.

b. En déduis dans $\mathbb{Z}^2$, les solutions de l'équation : $10^n x + 2^{n+2} y - 10 \times 2^{n-1} = 0$.

Exercice40 : Dans toute l'activité, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$

1. a. Calcule le $\text{PGCD}(363; 484)$.

b. Le couple $(363; 484)$ appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel ; le couple $(n; n+1)$ appartient-il à S ? Justifie ta réponse.

3. a. Prouve que le (x, y) appartient à S si et seulement si, il existe un entier naturel non nul k tel que : $k = y - x$ et $y = (k+1)(y-x)$.

b. Déduis-en que pour tout couple (x, y) de S , on a : $\text{PPMC}(x, y) = k(k+1)(y-x)$.

4.a. Détermine l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. Désuis-en l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $\text{PPMC}(x, y) = 228$.

Exercice41 : Soit x, y et z trois entiers strictement positifs. On dit que (x, y, z) forment un triplet Pythagorien si :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

1. a. Démontrer, en étudiant tous les cas possibles qu'aucun carré n'est congru à 2 modulo 4.
b. En déduire que x et y ne peuvent pas être impairs tous les deux. Dans toute la suite, on suppose que y est pair.
c. Démontrer que x et z ont la même parité.
2. a. Étude d'un exemple. On prend dans cette question $y = 12$. Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) qui satisfont à la relation $x^2 + y^2 = z^2$.
b. Parmi les triplets déterminés ci-dessus, quels sont ceux pour lesquels x, y et z n'ont aucun diviseur commun autre que 1 ? On appellera désormais « triplet pythagorien primitif ».
3. On suppose ici que x, y et z forme un triplet pythagorien primitif.
a. Démontrer que x et z sont premiers entre eux.
b. On pose $y = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $p^2 = \left(\frac{z+x}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right)$.
c. Démontrer que $\left(\frac{z+x}{2}\right)$ et $\left(\frac{z-x}{2}\right)$ sont premiers entre eux.
d. En déduire qu'il existe des entiers u et v tels que : $u^2 = \left(\frac{z+x}{2}\right)$ et $v^2 = \left(\frac{z-x}{2}\right)$.
e. Justifier que u et v sont premiers entre eux, de parité différente et que $u > v$.
4. Démontrer que l'on a :

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

Problème1 : Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3; y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.
2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n .
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.
4. Soit n un entier naturel.
a. Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.
b. Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.
5. a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.
b. Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4} .
6. En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

Problème2 : Arithmétique et l'astronomie

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B dont la période est 81 jours.

Le but de l'exercice est de déterminer le jour J_1 de la prochaine apparition simultanée des 2 objets A et B aux yeux de l'astronome.

1. Soit u et v le nombre de période effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 . Démontrer que le couple (u, v) est solution de l'équation : $(E_1) : 35x - 27y = 2$.

2.
 - a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de (E_2) : $35x - 27y = 1$.
 - b. En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de (E_1) .
3.
 - a. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1) .
 - b. Quelle est la solution (u, v) permettant de trouver J_1 ?
 - c. Combien de Jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
4.
 - a. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999. Quelle est la date exacte du jour J_1 ?
 - b. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?