

SERIE DES EXERCICES SUR ARITHMETIQUE

EXERCICE 1

- 1) Soit l'entier naturel $N = 1323$.
- a) Décompose N en produit de facteurs premiers.
- b) Détermine le nombre de diviseurs de N et trouve tous les diviseurs de N .
- c) Ecrire N dans le système de numération de base deux.
- 2) Détermine n entier naturel pour que $A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x - 84y = 7$ sachant que $(91; 14)$ est une solution particulière de l'équation. En déduis deux autres solutions particulières.
- 4) Détermine tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $a + b = 56$ et $a \vee b = 105$.

EXERCICE 2

Soit le système (S) :
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$
 Les inconnues x et y étant des entiers relatifs non nuls,

- 1) Résous (S) dans $\mathbb{Z}^2$.
- 2) Résous (S) dans $\mathbb{C}^2$.

EXERCICE 3 : 1) résous dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$$

2) a) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $5x - 11y = 4$.

b) En déduis la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système:
$$\begin{cases} 3a \equiv 1[5] \\ 7a \equiv 9[11] \end{cases}$$

EXERCICE 4

- 1) Détermine le chiffre x pour que $53x2$ soit divisible par 9.
- 2) Détermine le chiffre y pour que $53y4$ soit divisible par 3 et 4.

EXERCICE 5

Soit n un entier à trois chiffres abc et m l'entier à trois chiffres obtenus en permutant le chiffre centaines et des unités. Montre que $n - m$ est un multiple de 99.

EXERCICE 6

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation: $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$. Montre que les solutions sont conjuguées deux à deux.
2. Ecris le polynôme $4x^4 + 3x^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes à coefficient réels. En déduis que dans tout système de numération de base ≥ 5 le nombre $\overline{40301}^b$ est multiple de $\overline{211}^b$. Quel est le quotient de la division de $\overline{40301}^b$ par $\overline{211}^b$.

EXERCICE 7

Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$. En déduis que dans un système de numération dont la base est au moins égale à cinq le nombre $\overline{10304}$ est divisible par $\overline{112}$.

EXERCICE 8

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1/ Détermine x pour que :

a°) A soit divisible par six ;

b°) A soit divisible par cinq ;

c°) En déduis qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2 / On donne x la valeur zéro. Détermine l'écriture décimale de A .

Dans ce cas quel est le nombre de diviseur positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

EXERCICE 9

Trouve l'ensemble des entiers naturels $\overline{mcd u}$ dans le système décimal et possédant les propriétés suivantes : $\begin{cases} cd = 2d + 3c \\ m - u = 7 \end{cases}$

EXERCICE 10

1/Ecris $2^6 - 1$ en base deux.

2/b est un entier naturel supérieur à 1. Ecris $(b+1)^2$ en base b.

(On distinguera deux cas : $b = 2$ et $b \neq 2$).

EXERCICE 11

1) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv -1[5]$.

2) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$

3) Démontre que la somme des cubes de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 9.

EXERCICE 12

1°) Détermine, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A = n^2 - n + 1$.

2°) En déduis les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.

3°) Détermine le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $B = (2753)^2 - 2753 + 1$.

EXERCICE 13

Démontre que pour tous entiers relatifs a, b et c on a : $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[7] \Rightarrow abc \equiv 0[7]$

EXERCICE 14

1°) Un nombre s'écrit $\overline{1x1yxy}$ dans le système décimal.

Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 63.

2°) Démontre que pour tout entier naturel n, on a :

a°) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ divisible par 7.

b°) $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

c°) $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.

EXERCICE 15

1. Démontre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $(n+1)! \geq \sum_{i=1}^n i!$

b) $\sum_{i=1}^n i \times i! = (n+1)! - 1$

2. α et β sont deux entiers et $n = 2^\alpha 3^\beta$

Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

a) Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

b) Déduisez-en les valeurs de n.

EXERCICE 16 : 1) $n \in \mathbb{Z}$, Démontre que si un entier relatif a divise les entiers

$n^2 + 3n + 13$ et $n + 2$ alors a divise 11.

2) Détermine les entiers relatifs n tels que $n - 1$ divise $n + 17$ en remarquant que :

$n + 17 = (n - 1) + 18$.

3) Détermine tous les entiers naturels x et y tels que : $(x - 1)^2 y = 1$

EXERCICE 17

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$

1-) a- Ecris S sous la forme d'un quotient.

b- Calcule l'expression $p^n + (1 - p)S$ et en déduis que p^n et $(1 - p)S$ sont premiers entre eux.

- 2-)a- Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $p^n x - (1 - p)y = p$.
 b- En déduis dans $\mathbb{Z}^2$ les solutions de l'équation : $10^n x + 2^{n+2}y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0$

EXERCICE 18

- 1-Etablis que pour tout $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3$, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - bq)$
 2-Montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(5n^3 - n, n+2) = \text{pgcd}(n+2, 38)$
 3-Détermine l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n+2)$ divise $(5n^3 - n)$
 4-Quelles sont les valeurs possible de $\text{pgcd}(5n^3 - n, n+2)$?
 Détermine l'ensemble des entiers n tel que $\text{pgcd}(5n^3 - n, n+2) = 19$

EXERCICE 19

- Soit n un entier premier différent de 2 .On considère les entiers naturels et
 $a = (n + 1)^2$ et $b = n^3 + 1$ et on désigne par d le $\text{pgcd}(a, b)$
 1-)a-Montre que: $\forall n \in \mathbb{N}, b = (n + 1)^2(n - 2) + 3(n + 1)$
 b-Démontre que $d = n+1$ ou $d = 3(n+1)$
 2-)a-Trouve une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait : $70a - 13b = 8$
 b-Montre alors que la seule valeur possible de n est 7

EXERCICE 20

- 1-)a-Pour $1 \leq n \leq 6$, calcule les restes de la divisions euclidienne de 3^n par 7.
 b-Démontre que pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
 En déduis que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7
 c-A l'aide des résultats précédents, calcule le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7
 d-De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
 e-En déduis que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7
 2-)Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$
 a-Montre que $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
 b-Détermine les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.
 c-Détermine tous les diviseurs de u_6 .

EXERCICE 21

- A)1) Détermine le plus petit entier naturel p non nul tel que $7^p \equiv 1[10]$.
 2)Trouve le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $A = 1997^{1999^{2001}}$
 B/ Trouve le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}

EXERCICE 22

- 1-) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1): 11x + 8y = 79$
 a-Montre que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3[11]$
 b-Résous alors l'équation (E_1) .
 2-)Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2): 3y + 11z = 372$.
 a-Montre que si (y, z) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0[3]$
 b-Résous alors l'équation (E_2) .
 3-)Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(E_3): 3x - 8z = -249$.
 4-)Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 dinars.
 Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars.
 Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars.
 Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars.
 Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

EXERCICE 23

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

- 1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m.

On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté.

On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.

Calcule le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

- 2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m. On veut carrelé cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
- a) Donne la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
- b) Donne la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
- c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carrelé cette Cuisine?
- 3) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.
- a) Donne la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
- b) Donne la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
- c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

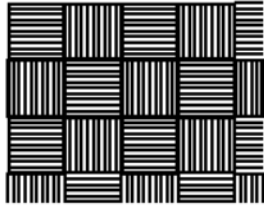


Figure 1

EXERCICE 24

On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

EXERCICE 25: $n \in \mathbb{N}$

- 1) a) Détermine suivant les valeurs de n , les restes dans la division euclidienne par 5 des entiers 2^n et 3^n .
- b) En déduis pour quelles valeurs de n , le nombre entier $A = 1188^n + 2257^n$ est divisible par 5.
- 2) Démontre que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

EXERCICE 26

- 1) Complète : $7 \equiv \dots \pmod{10}$ $7^2 \equiv \dots \pmod{10}$ $7^3 \equiv \dots \pmod{10}$ $7^4 \equiv \dots \pmod{10}$
- 2) En déduis $7^{401} \equiv \dots \pmod{10}$ puis $7^{31} \equiv \dots \pmod{10}$
- 3) Le premier janvier 2000 était un samedi. Quel jour serons-nous le 1^{er} janvier 2100 ? (2000, 2004 ...sont bissextiles)

EXERCICE 27

n est un entier relatif quelconque, on pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$

- 1) a) Montre que le PGCD de A et B est. égal au PGCD de A et 4
- b) Détermine suivant les valeurs de n , le PGCD de A et B .
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il entier relatif ?

EXERCICE 28

Un étranger A revient dans votre famille tous les 24 jours et un autre B y revient tous les 18 jours. Le jour du baptême de votre fils Mamadou, les deux étrangers étaient présents chez vous.

- a) A partir de ce jour, combien de jours s'écouleront pour que l'étranger A l'étranger B se retrouvent pour la première fois chez vous?
- b) En déduis le nombre de jours à observer pour qu'ils se retrouvent chez vous pour la cinquième fois.
- A cette date, combien de retours chez vous auront fait les étrangers A et B?

EXERCICE 29

A/1) Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24.

Détermine tous les couples (a, b) possibles.

2) Détermine tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels $x + y = 96$ et $\text{pgcd}(x, y) = 4$.

B/Trouve les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls dont le PGCD d et le PPCM m vérifient :

$$3m - 2d = 30.$$

EXERCICE 30

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a) Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+3} \equiv A_n [7]$.

b) Détermine ensemble S des entiers naturels tels que $A_n \equiv 0 [7]$.

c) Les nombres $\alpha = \overline{1110}^2$; $\beta = \overline{1010100}^2$; $\gamma = \overline{1001001000}^2$ sont-ils divisibles par 7?

EXERCICE 31

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1°) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ?

2°) Précise le nombre de déplacement par laps de temps.

EXERCICE 32

On considère les nombres x, y et z écrits en base m par :

$$X = \overline{120} ; y = \overline{132} \text{ et } z = \overline{21340}$$

a°) Sachant que $z = xy$ trouver la base m .

b°) Trouve l'écriture des nombres x, y et z dans le système décimal

EXERCICE 33

1°) Démontre par récurrence que le nombre 169 divise le $3^{3n+3} - 26n - 27 \forall n \in \mathbb{N}$.

2°) a) Détermine selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 4^n par 9.

b) En déduis que, pour tout entier naturel n non nul, le nombre $22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

3°) a) Résous dans $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, l'équation : $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) Détermine les entiers naturels x , tels que le nombre entier N qui s'écrit $\overline{138}$ en base x , soit divisible par 12.

EXERCICE 34

1°) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 1 [5]$.

2°) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x \equiv 2 [7]$

3°) Résous dans $\mathbb{Z}$ le système formé par les deux équations précédentes.

EXERCICE 35

1°) Détermine les paires $\{a, b\}$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$2m + 7d = 111 \text{ ou } m = \text{PPCM}(a, b) \text{ et } d = \text{PGCD}(a, b).$$

2°) a) Trouve trois entiers naturels a, b et c premiers entre eux, deux à deux et différents de 1 tels que : $a \times b \times c = 495$.

b) x, y et z étant les chiffres dans la base 10, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}^{10}$. Détermine tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A est multiple de 495.

EXERCICE 36

1°) Détermine le PGCD des nombres 21590 et 9525.

2°) Détermine l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels on a : $34x \equiv 2 [15]$

3°) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $21590x + 9525y = 1270$.

EXERCICE 37

On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et la fonction f de E vers E qui à tout x associe $5x + 3$. Montre que f est une bijection de E sur E ; donne l'expression de la réciproque f^{-1} de f .

EXERCICE 38 :

1°) Détermine les entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif.

2°) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal.

Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

3°) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal.

Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 3 et par 11

EXERCICE 39

Détermine les triangles OAB rectangles en O , dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers, le côté OA ayant pour 12.

Calcule $OB = n$ et $AB = N$. Parmi ces triangles, existe-t-il des triangles semblables ? Lesquels.

EXERCICE 40

1°) Combien y a-t-il de multiples de 11 compris entre -1000 et 1000.

2°) Détermine les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 28$.

EXERCICE 41

1) Les nombres sont écrits en base cinq ; effectuer les opérations suivantes

$$3421 + 240$$

$$3421 \times 230.$$

2) Soit x, y et z trois entiers naturels. On suppose que dans le système de numération de base x , les nombres y et z s'écrivent respectivement 131 et 101.

c) Montre que, sans connaître x , on peut exprimer le produit xyz dans le système de base x .

d) On sait en outre que dans le système décimal $x+y+z=50$. Détermine, dans le système décimal, le nombre x . En déduis le produit xyz .

EXERCICE 42

Résous et discute dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ le système
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 1x + 3y = m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 43

1) On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1-z).$$

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résous l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1)
$$\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$$

a-/ Montre que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions.

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions, calcule, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 , l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$.

c-/ En déduis que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

Quel est l'ensemble des solutions du système ?

II-//1-/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a-/ Montre que si $(x; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$

b-/ Résous alors l'équation (E).

2-/ Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F. Le prix d'une pièce du 1^{er} lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2^{ème} lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3^{ème} lot est 400F.

Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

EXERCICE 44 : $n \in \mathbb{N}$

1) a) Détermine suivant les valeurs de n , les restes dans la division euclidienne par 5 des entiers 2^n et 3^n .

b) En déduis pour quelles valeurs de n , le nombre entier

$A = 1188^n + 2257^n$ est divisible par 5.

2) Démontre que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

EXERCICE :45

Une bande de 17 voleurs ont volé un sac de N pièces d'or d'égale valeur dans une maison délaissée par les propriétaires à cause de la présence du virus d'Ebola, seul le gardien était présent. Ils décident de partager ces N pièces équitablement et de donner le reste au gardien.

Celui-ci reçoit 3 pièces. 21 jours plus tard 6 voleurs sont morts d'ébola. Ils ont rassemblé les N pièces et divisés à nouveau le gardien a eu 4 pièces.

Les autres voleurs ont fait le test seul 6 et le gardien n'ont pas le virus ; ils ont rassemblé à nouveau et partager en 6 parts égales et le gardien a reçu 5 pièces.

Le gardien s'est dit alors mais si tous les voleurs étaient contaminés par le virus d'Ebola, combien de pièces allait-il avoir ? Aide le gardien sachant que ce nombre est compris entre 800 et 1000.

EXERCICE 46

Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1) Détermine un couple d'entiers $(\alpha; \beta)$ solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.

2) En déduis un couple (u_0, v_0) solution de l'équation ci-dessous puis résoudre complètement cette equation : $23u - 7v = -6$.

3) Démontre que x est solution de (S) si et seulement si il existe (u, v) couple d'entiers verifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduis l'ensemble des solutions de (S).

4) Détermine la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16.

EXERCICE 47

Soit n un entier positif, on définit $M_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Montre que si M_n est premier alors n est premier.

EXERCICE 48

On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de cotés 132m, 156m et 204m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbre que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètre ?

EXERCICE 49

Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y_2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y00_3$ dans le système de numération de base sept.

- 1) Détermine les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
- 2) Détermine le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduis le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
- 3) a) Décompose m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.
b) En déduis le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le pgcd ($m_1 ; m_2$)
- 4) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ ou u et v sont deux entiers relatifs.

EXERCICE 50

On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a^2+a}{2} \text{ avec } a \in \mathbb{N}.$$

- e) Démontre que si n est la Somme de deux nombres triangulaires alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
- f) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la Somme de deux carrés d'entiers?
Etudie la réciproque de a).

EXERCICE 51 : 1) Le nombre d'élève d'une classe est inférieur à 40.

Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est l'effectif de la classe ?

2) Quel est le reste dans la division par 7 du nombre

$$A = 999888777666555444333222111 ?$$

EXERCICE 52 :

- 1) Trouve le reste de la division euclidienne par 5 de :
 $53 \cdot (427)^{2017} + 24 \cdot (528)^{2018}.$
- 2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$: $564x + 271y = 2$
- 3) Résous dans $\mathbb{N}^2$: $m^2 - 3d^2 = 1998$ ou $m = \text{PPCM}(a, b)$ et $d = \text{PGCD}(a, b)$.

EXERCICE 53: 1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? justifie

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ?

c) En déduis que $6^{40} - 1 \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.

d) Démontre que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2) $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) Montre que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Montre que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Détermine à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E'). En déduis qu'il existe un unique entier naturel $x_0 < 40$ tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, démontre que, si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$ alors $b^{33} \equiv a[55]$.

