

Epreuve de : Mathématiques

Série : TSE

Durée : 4 heures

Exercices ① ----- 6 points

1. Démontre par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+2} - 4^{n+2}$ est divisible par 11;b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

2. Soit (a ; b ; c) un triplé d'entiers naturels tel que

 $a = \overline{111}^{(n)}; b = \overline{114}^{(n)}; c = \overline{13054}^{(n)}$; dans le système de numération de base n.a) Sachant que $c = ab$, détermine la base n du système de numération puis l'écriture des nombres a, b et c dans le système décimal.

b) Vérifie, en utilisant l'algorithme d'Euclide que a et b sont étrangers.

c) En déduis les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $ax + by = 1$.d) Résous dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $X^2 + X + 1 = 0$.

Exercice ② ----- 6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe différent de $-2 + i$, on considère le nombre $U = \frac{iz+3}{z+2-i}$.On pose $U = X + iY$ et $z = x + iy$, où X, Y, x et y sont des nombres réels.

1. Exprime X et Y en fonction de x et y.

2. Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que U soit réel.

3. a) Donne l'expression de U en fonction de y si 1) est imaginaire pur.

b) En déduis z_A du point A tel que $U = 3i$.c) Met sous forme exponentielle z_A et en déduis la forme algébrique de $(z_A)^{16}$.4. Détermine et construis l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que $|U - i| = \sqrt{2}$.

5. Quel l'ensemble (B) des points M d'affixe z tel que U soit imaginaire pur ?

Problème : ----- 8 points

1. On donne $N = 21210^3$

a) Sans passer par le système décimal, écris N dans le système binaire (base 2).

b) Ecris N dans le système décimal.

2. a) Décompose 612 en produit de facteurs premiers et détermine le nombre de diviseurs positifs de 612.

b) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 612.

c) Détermine les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 612$.

d) Après avoir trouvé les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 612, détermine les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $m^2 - 127 d^2 = 612$ où $m = \text{PPCM}(a, b)$ et

$d = \text{PGCD}(a, b)$.

3. Résous dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$: a) $3x = 4$;

b) $x^2 - 27x + 15 = 0$.

4. Pour quelles de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$ est-il un entier relatif ?

5. On veut entourer avec un nombre minimum d'arbres un champ rectangulaire de dimensions 396 et 156. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

a) la distance entre deux arbres ;

b) le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

6. On considère les nombres A et B tels que :

$A = 10^{5n+2} + 10^{3n+1} + 1$ et $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifie que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$.

b) Démontre que : * $\forall n \in \mathbb{N}$, A est divisible par 111 ;

* Si n est impair, alors A est divisible par 7 et par 13.

B

Devoir N°2 TSE - 2022-2023 - LWA KA

Exo ①, (6pts)

① Démontrons par récurrence que

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \text{ [11]}.$$

$$\text{Posons } A_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}.$$

$$* \text{ Pour } n=0, A_0 = 3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$$

$$\text{Donc } A_0 \equiv 0 \text{ [11]}$$

La propriété est vérifiée pour le rang $n=0$.

$$* \text{ Pour } n \geq 0, \text{ supposons que } A_n \equiv 0 \text{ [11]}$$

$$\text{et montrons que } A_{n+1} \equiv 0 \text{ [11]}$$

$$\text{Par hypothèse, } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A_k = 11k}$$

$$\text{ona: } A_{n+1} = 3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2}$$
$$= 3^{n+3} \times 3^1 - 4^{4n+2} \times 4^4$$

$$\Rightarrow A_{n+1} = 3^{n+3} \times 3 - 4^{4n+2} \times 256.$$

on sait que $256 = 11 \times 23 + 3. \Rightarrow$
 $256 \equiv 3 \pmod{11}$

Donc $A_{n+1} \equiv 3^{n+3} \times 3 - 4^{4n+2} \times 3 \pmod{11}$

$$\Rightarrow A_{n+1} \equiv 3 \left(3^{n+3} - 4^{4n+2} \right) \pmod{11}$$

A_n

$$\Rightarrow A_{n+1} \equiv 3 \times 11k \pmod{11}$$

$$\Rightarrow A_{n+1} \equiv 0 \pmod{11} \quad \text{Q.F.D.}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* B_n = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
 $= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

* Pour $n=1$ $B_1 = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$

$$\left\{ \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6} \right.$$

La propriété est vraie pour le rang $n=1$.

* Pour $n \geq 1$, supposons que :

$$B_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \text{ et montrons que :}$$

$$B_{n+1} = \frac{(n+1)[(n+1)+3]}{4[(n+1)+1][(n+1)+2]} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

* on a :

$$B_{n+1} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= B_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ d'après l'hypothèse}$$

$$= \frac{n(n+3)(n+3)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\begin{array}{r}
 na: \quad n^3 + 6n^2 + 9n + 4 \\
 \underline{-n^3 - n^2} \\
 5n^2 + 9n + 4 \\
 \underline{-5n^2 - 5n} \\
 4n + 4 \\
 \underline{-4n - 4} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 n+1 \\
 \hline
 n^2 + 5n + 4 \\
 \hline
 \underline{-n^2 - n} \\
 4n + 4 \\
 \hline
 \underline{-4n - 4} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 n+1 \\
 \hline
 n+4
 \end{array}$$

Doi $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)(n+1)(n+4)$

Doi $B_n = \frac{(n+1)(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$

$\Rightarrow B_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} \quad \text{Q.E.D.}$

② Soit (a, b, c) un triple d'entiers naturels tels que :

$$a = \overline{111}^{(n)} ; b = \overline{114}^{(n)} ; c = \overline{13054}^{(n)}$$

dans le système de numération de base n

a) Sachant que $c = a \times b$, déterminer la base n du système puis l'écriture des nombres a, b et c dans le système décimal (base 10) :

* 5 est un chiffre de la base n , donc $n \geq 6$.
avec $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a = 1 \cdot n^2 + 1 \cdot n^1 + 1 \cdot n^0 = n^2 + n + 1$$

$$b = 1 \cdot n^2 + 1 \cdot n^1 + 4 \cdot n^0 = n^2 + n + 4$$

$$c = 1 \cdot n^4 + 3 \cdot n^3 + 0 \cdot n^2 + 5 \cdot n^1 + 4 \cdot n^0 = n^4 + 3n^3 + 5n + 4$$

$$\text{on a } c = a \times b$$

$$\Rightarrow n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 4)$$

$$\Rightarrow n^4 + 3n^3 + 5n + 4 = n^4 + 2n^3 + 6n^2 + 5n + 4$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 6n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n=0 \text{ ou } n=6)$$

Comme $n \geq 6$ alors :

La base est $n=6$. Donc

$$\begin{cases} a = 36 + 6 + 1 = \overline{43}^{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 36 + 6 + 4 = \overline{46}^{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1296 + 648 + 30 + 4 = \overline{1978}^{10} \end{cases}$$

D'où

$$a = \overline{43}^{10} ; b = \overline{46}^{10} ; c = \overline{1978}^{10}$$

b) Vérifions, à l'aide de l'algorithme d'Euclide que que a et b sont étrangers

$$a = 43 \text{ et } b = 46$$

	1	14	3
46	43	3	1
3	(1)	0	

Le dernier reste non
nul est 1. Donc

$$\text{PGCD}(46; 43) = 1.$$

Donc 46 et 43

sont premiers

c) Déduisons en les solutions dans $\mathbb{Z}^2$
de, $ax + by = 1$

on a: $43x + 46y = 1$

L'algorithme d'Euclide donne:

1	14
46	43
3	
(3)	(1)

$$1 = 43 - 14 \times 3$$

$$1 = 43 - 14[46 - 43]$$

$$1 = 43 - 14 \times 46 + 14 \times 43$$

$$1 = 43(15) + 46(-14)$$

D'où $(15; -14)$ est une solution
particulière de l'équation.

$$\begin{cases} 43x + 46y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 43(15) + 46(-14) = 1 \end{cases}$$

$$43(x - 15) + 46(y + 14) = 0$$

$$\Rightarrow 43(x-15) = -46(y+14)$$

Comme $43 \wedge 46 = 1$ alors

$$\begin{cases} x = -46k + 15 \\ y = 43k - 14 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \{(-46k + 15; 43k - 14), k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Résolvons dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

l'équation: $x^2 + x + 1 = 0$

x	0	1	2	3
x^2	0	1	0	1
x	0	1	2	3
1	1	1	1	1

$x^2 + x + 1$	1	3	3	1
---------------	---	---	---	---

$$S = \{ \}$$

Problème

10) on donne $N = 21210_4$

a) Ecrivons N en base 2 sans passer par la base 10 :

$$N = 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$$

$$= 2 \times (2^2)^4 + 1 \cdot (2^2)^3 + 2(2^2)^2 + 1(2^2)^1 + 0$$

$$= 2^9 + 2^6 + 2^5 + 2^2$$

$$= 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0$$

$$\boxed{N = 1001100100_2}$$

b) Ecrivons N dans la base 10

$$N = 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0$$

$$= 512 + 64 + 32 + 4$$

$$\boxed{N = 612_{10}}$$

(Suite) Devoir N° 2 TSE LWAKA 2022-2023

Problème : 2°) Décomposons 612 en produit de facteurs premiers et déterminons le nombre de diviseurs positifs de 612 :

a) $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17^1$

612 a $(2+1)(2+1)(1+1) = 18$ diviseurs positifs.

b) $612 = \textcircled{1} \times 612$
 $= 2 \times 306$
 $= 3 \times 204$
 $= \textcircled{4} \times 153$
 $= 6 \times 102$
 $= \textcircled{9} \times 68$
 $= 12 \times 51$
 $= 17 \times \textcircled{36}$
 $= 18 \times 34$

Les diviseurs positifs de 612 sont :

$\{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 17; 18; 34; 36; 51; 68; 102; 153; 204; 306; 612\}$

c) Déterminons les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 612$

on réécrit $(x+y)(x-y) = 612$.

$(x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ y \geq -y \end{cases} \Rightarrow x+y \geq x-y$

on analyse les cas où $x+y \geq x-y$.

$x+y$	612	306	204	153	102	68	51	36	34
$x-y$	1	2	3	4	6	8	12	17	18

$$\begin{cases} x+y = s \\ x-y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{s+d}{2} \\ y = \frac{s-d}{2} \end{cases}$$

$$\frac{612+1}{2} \notin \mathbb{N}; \frac{204+3}{2} \notin \mathbb{N}; \frac{153+4}{2} \notin \mathbb{N}; \frac{68+8}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{51+12}{2} \notin \mathbb{N}; \frac{36+17}{2} \notin \mathbb{N}$$

1^{er} cas $\begin{cases} x+y = 306 \\ x-y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{306+2}{2} = \frac{308}{2} = 154 \\ y = \frac{306-2}{2} = \frac{304}{2} = 152 \end{cases}$

2^e cas $\begin{cases} x+y = 102 \\ x-y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{102+6}{2} = \frac{108}{2} = 54 \\ y = \frac{102-6}{2} = \frac{96}{2} = 48 \end{cases}$

3^e cas $\begin{cases} x+y = 34 \\ x-y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{34+18}{2} = \frac{52}{2} = 26 \\ y = \frac{34-18}{2} = \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$

D'où $S = \{(154; 152); (54; 48); (26; 8)\}$.

d) Après avoir trouvé les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 612, déterminons les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $m^2 - 127d^2 = 612$ où $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.

Les diviseurs positifs de 612 qui sont des carrés parfaits sont : $1; 4; 9; 36$

* Les nombres naturels dont le carré est un diviseur de 612 sont :

$1; 2; 3 \text{ et } 6$

* Si $a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$, avec $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ alors :

$\exists! a' \in \mathbb{N}^*; \exists! b' \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ a' \wedge b' = 1 \\ m = a'b'd \end{cases}$$

$$\text{on a: } m^2 - 127d^2 = 612.$$

$$\Rightarrow (a'b'd)^2 - 127d^2 = 612.$$

$$\Rightarrow (a'b')^2 d^2 - 127d^2 = 612.$$

$$\Rightarrow d^2 [(a'b')^2 - 127] = 612.$$

donc d^2 est un diviseur de 612.

$$\Rightarrow d^2 \in \{1, 4, 9, 36\},$$

$$\Rightarrow d \in \{1, 2, 3, 6\} \text{ par } d \in \mathbb{N}.$$

$$\text{on a: } (a'b')^2 - 127 = \frac{612}{d^2}.$$

$$\Rightarrow (a'b')^2 = 127 + \frac{612}{d^2}.$$

1^{er} cas: si $d=1$ alors $(a'b')^2 = 127 + 612$

$$\Rightarrow (a'b')^2 = 739 \text{ or } \sqrt{739} \notin \mathbb{N}.$$

cas à rejeter.

2^e Cas : $n'd = 2$ alors $(a'b')^2 = 127 + \frac{612}{4}$

$\Rightarrow (a'b')^2 = 127 + 153 = 280$ or $\sqrt{280} \notin \mathbb{N}$

Cas à rejeter

3^e Cas : $n'd = 3$ alors $(a'b')^2 = 127 + \frac{612}{9}$

$\Rightarrow (a'b')^2 = 127 + 68 = 195$ or $\sqrt{195} \notin \mathbb{N}$

4^e Cas : $n'd = 6$ alors $(a'b')^2 = 127 + \frac{612}{36}$

$\Rightarrow (a'b')^2 = 127 + 17 = 144 = 12^2$

$\Rightarrow \boxed{a'b' = 12}$ car $a'b' > 0$

a'	1	2	3	4	6	12
b'	12	6	4	3	2	1

$2 \wedge 6 \neq 1$; $1 \wedge 12 = 12 \wedge 1 = 1$

$3 \wedge 4 = 4 \wedge 3 = 1$

Donc $(a', b') \in \{(1, 12); (12, 1); (3, 4); (4, 3)\}$

Comme $d = 6$ alors

$\boxed{(a, b) \in \{(6, 72); (72, 6); (18, 24); (24, 18)\}}$

30) Résolvons dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$:

a) $3x = 4 \quad / \times 10$

$$\Rightarrow 30x = 40$$

29 est un nombre premier $\Rightarrow$

$\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ est un anneau intègre

$$\text{on a } \begin{cases} 30 = 1 \\ 40 = 11 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

D'où $S = \{11\}$

b) $x^2 - 27x + 15 = 0$

on a : $-27 = 2 \quad [29]$

$$\Rightarrow (-27) = 2$$

on a : $x^2 + 2x + 15 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (-14) = 15$$

Pas de solution car 15 n'est pas un carré parfait.

$$S = \emptyset$$

4°) Trouvons les entiers relatifs n tels que $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$ soit un entier relatif ;

Posons $A = \frac{n^2+3n+1}{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} n^2+3n+1 & n+1 \\ -n^2-n & \\ \hline 2n+1 & \\ -2n-2 & \\ \hline -1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} n+1 \\ n+2 \end{array}$$

ona: $A_n = n+2 - \frac{1}{n+1}$

si $n \in \mathbb{Z}$ alors $(n+2) \in \mathbb{Z}$.

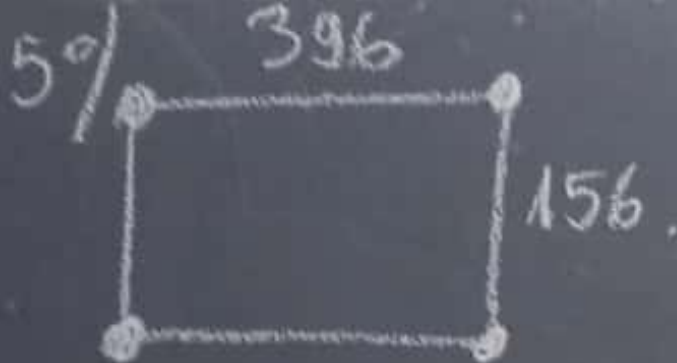
$A_n \in \mathbb{Z} \iff [(n+1) \text{ est un diviseur de } 1]$

$$\iff \begin{cases} n+1=1 \\ \text{ou} \\ n+1=-1 \end{cases}$$

car les diviseurs relatifs de 1 sont: -1 et 1

$$\iff \begin{cases} n=0 \\ \text{ou} \\ n=-2 \end{cases}$$

$$\boxed{n \in \{-2; 0\}} \Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{4-6+1}{-2+1} = 1 \\ \text{ou} \\ A_n = \frac{0+0+1}{0+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_n = 1}$$



a) Calculons l'espace e séparant deux arbres consécutifs :

$e \in D_{396} \cap D_{156}$. Comme on veut le minimum d'arbres alors :

$$e = \text{PGCD}(396; 156).$$

on a :

$$\begin{cases} 396 = 9 \times 4 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \\ 156 = 4 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13 \end{cases}$$

Donc $e = 2^2 \times 3 \Rightarrow \boxed{e = 12}$

b) Trouvons le nombre n d'arbres nécessaires

on a :

$$n = \frac{\text{Périmètre}}{e} = \frac{(396 + 156) \times 2}{12}$$

$$\boxed{n = 92 \text{ arbres}}$$

$$6^{\circ}) A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$$

$$B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

a) Vérifions que $\left. \begin{array}{l} 10^3 - 1 = 9 \times 111 \\ \text{et} \\ 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \end{array} \right\}$

* on a: $\left\{ \begin{array}{l} 10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999 \\ 9 \times 111 = 999 \end{array} \right.$

D'où $\boxed{10^3 - 1 = 9 \times 111}$

* on a $\left\{ \begin{array}{l} 10^3 + 1 = 1000 + 1 = 1001 \\ 7 \times 11 \times 13 = 77 \times 13 = 1001 \end{array} \right.$

D'où $\boxed{10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13}$

b) * Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, A est divisible par 111

$$\text{on a: } A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1.$$

$$\text{on a: } 10^3 - 1 = 9 \times 111$$

$$\Rightarrow 10^3 = 1 + 9 \times 111$$

$$\Rightarrow 10^3 \equiv 1 \pmod{111}$$

$$\text{al: } A = 10^{6n+2} \times 10 + 10^{3n+1} \times 10 + 1$$

$$= 100 \times (10^3)^{2n} + 10 \times (10^3)^n + 1$$

$$\Rightarrow A \equiv 100 \times (1)^{2n} + 10 \times (1)^n + 1 \pmod{111}$$

$$\Rightarrow A \equiv 100 \times 1 + 10 \times 1 + 1 \pmod{111}$$

$$\Rightarrow A \equiv 111 \pmod{111}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{111}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \text{ est divisible par } 111}$$

* Démontrons que si n est impair
alors B est divisible par 7 et par 13.

Si n est impair alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$.

$$\text{Donc: } B = 10^{9(2k+1)} + 10^{6(2k+1)} + 10^{3(2k+1)} + 1.$$

$$\Rightarrow B = 10^{18k+9} + 10^{12k+6} + 10^{6k+3} + 1.$$

$$\Rightarrow B = 10^{18k} \times 10^9 + 10^{12k} \times 10^6 + 10^{6k} \times 10^3 + 1.$$

$$\Rightarrow B = (10^3)^{6k} \times (10^3)^3 + (10^3)^{4k} \times (10^3)^2 + (10^3)^{2k} \times 10^3 + 1$$

$$\text{Or: } 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$$

$$\Rightarrow 10^3 = -1 + 14(7 \times 13)$$

$$\Rightarrow 10^3 \equiv -1 \pmod{7 \times 13}$$

$$\text{Donc: } B \equiv (-1)^{6k} \times (-1)^3 + (-1)^{4k} \times (-1)^2 + (-1)^{2k} \times (-1) + 1 \pmod{7 \times 13}$$

$$\Rightarrow B \equiv (1)(-1) + (1)(1) + (1)(-1) + 1 \pmod{7 \times 13}$$

$$\Rightarrow B \equiv -1 + 1 - 1 + 1 \pmod{7 \times 13}$$

$$\Rightarrow B \equiv 0 \pmod{7 \times 13} \Rightarrow \boxed{B \text{ est divisible par } 7 \text{ et par } 13}$$

Exo ② : (6pts) R.O.N.D (0; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

soit $z \in \mathbb{C} - \{-2+i\}$, Posons $z_B = -2+i$

$$U = \frac{iz+3}{z+2-i}$$

on pose $U = X + iY$ et $z = x + iy$, où
 $X; Y; x; y$ sont des nombres réels.

1°/ Exprimons X et Y en fonction de x et y

$$\begin{aligned} U &= \frac{iz+3}{z+2-i} = \frac{(iz+3)(\bar{z}+2+i)}{|z+2-i|^2} \\ &= \frac{iz\bar{z} + 2iz - z + 3\bar{z} + 6 + 3i}{|x+iy+2-i|^2} \\ &= \frac{i(x^2+y^2) + 2i(x+iy) - (x+iy) + 3(x-iy) + 6 + 3i}{|(x+2) + i(y-1)|^2} \\ &= \frac{i(x^2+y^2) + 2ix - 2y - x - iy + 3x - 3iy + 6 + 3i}{(x+2)^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

$$U = \frac{(-2y-x+3x+6)+i(x^2+y^2+x-y-3y+3)}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$U = \left[\frac{2x-2y+6}{(x+2)^2+(y-1)^2} \right] + i \left[\frac{x^2+x+y^2-4y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2} \right]$$

D'où $X = \frac{2(x-y+3)}{(x+2)^2+(y-1)^2}$ et $Y = \frac{(x^2+x)+(y^2-4y)+3}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

2°) Déterminons puis construisons l'ensemble
 (Γ) des points M d'affixes z tels que U soit réel

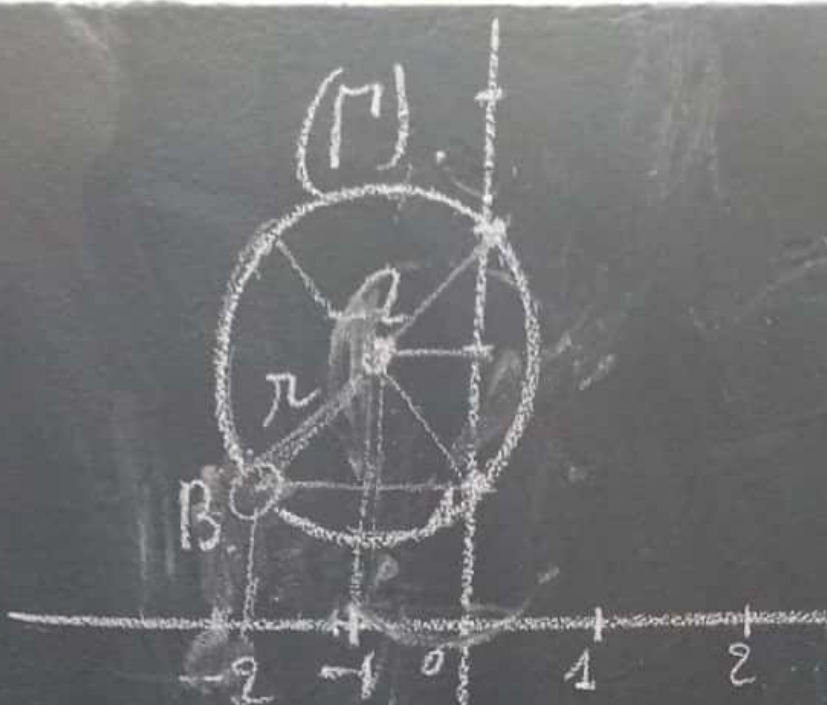
$$U \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x)+(y^2-4y)+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$$

(Γ) est le cercle de centre $S(-1; 2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$
 privé du point $B(-2; 1)$ car :

$$(-2+1)^2 + (1-2)^2 = 1+1 = 2 = (\sqrt{2})^2$$



3°/a) Donnons l'expression de U en fonction de y si U est imaginaire pur.

$$U \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(U) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = y - 3}$$

on a: $U = X + iY$ avec $X = 0$

$$\Leftrightarrow U = iY = i \frac{(x+1)^2 + (y-2)^2 - 2}{(x+2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{(y-3+1)^2 + (y-2)^2 - 2}{(y-3+2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{(y-2)^2 + (y-2)^2 - 2}{(y-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{2(y-2)^2 - 2}{2(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{(y-2)^2 - 1}{(y-1)^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{y^2 - 4y + 3}{y^2 - 2y + 1}}$$

b) Déduisons l'affixe z_A du point A
tel que $U = 3i$:

$$\text{on a : } \begin{cases} x_A = y_A - 3 \\ \frac{(y_A - 2)^2 - 1}{(y_A - 1)^2} = 3i \end{cases}$$

$$\text{on a : } (y_A - 2)^2 - 1 = 3i(y_A - 1)^2$$

$$\Rightarrow (y_A - 2 - 1)(y_A - 2 + 1) = 3i(y_A - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y_A - 3)(y_A - 1) - 3i(y_A - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y_A - 1)[(y_A - 3) - 3i(y_A - 1)] = 0$$

1er cas : si $y_A - 1 = 0$ alors $y_A = 1$

$$\text{Donc } x_A = 1 - 3 = -2 \Rightarrow$$

$$\boxed{z_A = -2 + i}$$

2^e cas : si $y \neq 1$ alors :

$$(y_A - 3) - 3i(y_A - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_A - 3 = 0 \\ y_A - 1 = 0 \end{cases}$$

impossible car y_A ne peut pas prendre deux valeurs en même temps