

ARITHMÉTIQUES

EXERCICES

momkadimath

Démonstration par récurrence

1 Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a \in \mathbb{R}_+^*; (1+a)^n > 1+na$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, (n+1)^3 \leq 3n^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (-1)^i \times i = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$$

2 Démontrer que :

- $3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11.
- $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- $n^3 - n$ est divisible par 3.
- $n^5 - n$ est divisible par 5.
- $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ divisible par 7.

Division euclidienne - Diviseurs - Multiples

1) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r.

Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

2) Déterminer les entiers naturels dont la division euclidienne par 16 a un reste est égal au carré du quotient.

3) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$. Rétablir la division.

4) Trouve les entiers naturels n qui divisé par 4 donne un reste égal au quotient.

5) Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire les valeurs possibles de x.

6) Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{2019} par 7 et celui de 2019^{2020} par 7.

7) Soit n un entier naturel. On donne les entiers naturels D_n et H tels que :

$$D_n = 2023^{3n} + 2023^{2n} + 2023^n + 1 \text{ et } H = \overline{22101^3}$$

- Détermine les restes de la division de 3^n par 5.
- En déduis le reste de la division de 2023^{2022} par 5.

- Détermine suivant les valeurs de n, le reste de la division de D_n par 5.
- Détermine le reste de la division de H par 5.
- Détermine l'entier x tel que pour que $2023^{2022} + 449x^{10}$ soit divisible par 5.
- Démontre que pour tout n, le nombre $n^5 - n$ est divisible par 5.

2 1. Quels sont les restes successifs de la division de 7^n par 8. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8

2. Soit le nombre $A = 5^{136} + \overline{3x53}^{10}$.

- Quel est le reste de la division 5^{136} par 7 ?
- Déterminer x pour que A soit divisible par 7.
- Déterminer x et y pour que le nombre $N = \overline{x4y}^{12}$ soit divisible par 11 et par 3. Vérifier que les nombres ainsi obtenus sont tous divisibles par 33

3 Pour tout nombre entier n, calculer le reste de la division euclidienne par 7 de 5^n et de 4^n . Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

Base de numération

1 Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffres des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

- Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.
- Ecrire ce nombre dans le système à base 8.

2 Soient les nombres N, M, O définis en base 10 par : $M = y17x35$; $N = 28x75y$; $O = 13xy45z$

Déterminer les chiffres x et y dans les cas suivants :

- N divisible par 3 et 11.
- M divisible par 9 et 11.
- O divisible par 8 ; 9 et 11.

3 Dans le système de numération de base 5, un nombre N s'écrit $\overline{3402}$.

- Dans quel système de numération k, N s'écrit $\overline{735}^k$
- Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{831}$
- Effectuer dans le système de numération de 5, les opérations : $3402 + 1331$; 3402×304 ; $3402 - 304$; $3402 : 304$.

4 L'expression d'un entier naturel n dans une base b est $\overline{1254}$. On sait de plus que l'expression de 2n dans la même base est $\overline{2541}$.

- Déterminer les valeurs de b et n en base 10.
- Déterminer les expressions en base b de $3n$ et $4n$.

Les entiers $\overline{cb}$; $\overline{bc}$ et $\overline{ac}$ sont écrits en base 10.

- Déterminer les chiffres a , b et c sachant

$$\text{que } \begin{cases} a + b + 5c + 3 = \overline{cb} \\ \overline{bc} - \overline{ac} = 10c \end{cases}$$

- Soit $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{10}$

- Etablir le critère de divisibilité par 3 et par 9.
- Etablir le critère de divisibilité par 11 et par 4.

Polynômes et Arithmétique

- On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Montrer que toute racine entière de P non nulle divise a_0
- En déduire que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ n'admet pas de solution entière.

- Soit un polynôme P à coefficients entiers relatifs : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $u = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible.

Dans cet exercice, on pourra admettre que si $\text{PGCD}(p; q) = 1$ alors $\text{PGCD}(p; q^n) = 1$.

- Montrer que si u est une racine de P alors p divise a_n et q divise a_0 .
- On donne $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 4$
 - Montrer qu'une racine de P ne peut être négative.
 - En utilisant 1) et a), en déduire que $\frac{2}{3}$ est une solution de $P(x) = 0$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(x) = 0$.
- Factoriser $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

Classe d'équivalence et Congruence

- Dans la congruence modulo 3,
 - Donner $\bar{0}$; $\bar{1}$; $\bar{2}$; $\bar{3}$; $\bar{4}$; $\bar{5}$; $\bar{3n}$; $\overline{3n+1}$; $\overline{3n+2}$. Quelle remarque fait-on ?
 - Déterminer $\bar{0} \cap \bar{1}$; $\bar{1} \cap \bar{2}$; $\bar{0} \cap \bar{2}$.
 - Comparer $\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$ et $\mathbb{Z}$.
- a. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations qui suivent
 - $4x + 4 = \bar{0}$
 - $x^2 + 2x + 4 = \bar{0}$
 - $x^3 + x^2 + 2x + 3 = \bar{0}$
 b. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 2y = \bar{1} \\ 2x + 4y = \bar{3} \end{cases}; \begin{cases} 2x + 3y = \bar{2} \\ x + 2y = \bar{4} \end{cases};$$
 c. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, l'équation :

$$x^2 - 6x + 5 = \bar{0} \text{ puis dans } (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2 \text{ le système } \begin{cases} 3x + 3y = \bar{0} \\ 2x + y = \bar{5} \end{cases}$$

- Etant donné un entier naturel n , on considère deux entiers relatifs $a = n^3 - 2n + 5$; $b = n + 1$.
 - Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, 6)$. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\text{PGCD}(a, b) = 3$?
 - Déterminer les valeurs de n pour que le nombre $\frac{a}{b}$ soit un entier relatif.
 - Existe-t-il des valeurs de n pour que $\frac{a}{b}$ soit une fraction irréductible
- Petit théorème de Fermat
 - Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p . On a $a^{p-1} - 1$ est divisible par p . Justifier que $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ est divisible par 37.
 - Montrer que alors que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair.
 - En déduire que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

5 Equations congruentes dans $\mathbb{N}$

- Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :
 - $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$
 - $34x \equiv 2[5]; 6x \equiv 4[15]$
- Résoudre dans $\mathbb{N}^2$
 - $x^2 - y^2 = 21; 2xy + y^2 = 14$
 - $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}; \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 5[7] \end{cases}$

PGCD - PPCM - Nombres premiers et étrangers

- a. Les nombres 4561; 497 sont-ils premiers ?
 b. Déterminer en utilisant au moins deux méthode :
 $\text{PGCD}(7253; 3451)$; $\text{PGCD}(426; 360)$;
 $\text{PGCD}(297; 685)$; $\text{PGCD}(297; 685; 17787)$.
 En déduire :
 $\text{PPCM}(7253; 3451)$; $\text{PPCM}(426; 360)$;
 $\text{PPCM}(297; 685)$; $\text{PPCM}(297; 685; 17787)$.
 c. Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants :
 2400; 4675; 9828; 15200; 45864; 792792
 En déduire $\text{PGCD}(4586; 792792)$;
 $\text{PPCM}(9828; 15200; 792792)$;
 $\text{PGCD}(2400; 4586; 792792)$

2 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:

- $(x \wedge y) + (x \vee y) = y + 9$;
- $3(x \wedge y) + 2(x \vee y) = 78$; $(x \wedge y) = y + 9$
- $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}; \begin{cases} x \wedge y = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases};$
- $\begin{cases} \text{PPCM}(x, y) = 120 \\ x^2 + y^2 = 801 \end{cases}$

- 3 Soit deux entiers naturels x et y tels que :
 $x \wedge y = d$ et $x \vee y = m$.

- 1- Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ dans le système suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 405 \\ 3m = xy \end{cases}$;
- 2- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 276.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 \leq d \leq 30 \end{cases}$.
- 3- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 \leq d \leq 50 \end{cases}$.
- 4- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 108.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 \leq d \leq 15 \end{cases}$.

Nombre et Ensemble de diviseurs

- 4 Décomposer le nombre 160 en produit de facteurs premiers.
- 2- Déterminer le nombre de diviseurs de 160.
- 3- Le nombre N se décompose $2^a \times 5^b$. Déterminer les entiers naturels a et b sachant que le nombre de diviseurs de 160 est le double du nombre de diviseurs de N .
 En déduire le nombre N puis l'écrire dans la base 16.
- 4- Quel est le nombre de diviseurs de 13 320 ?
 En déduire l'ensemble des diviseurs de 13320 dans $\mathbb{N}$.

Equations diophantiennes

- 1) 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, les équations suivantes :
 $15x + 9y = 6$; $237x - 39y = 3$; $x - 2y = 7$
 2) Soit l'équation (E) : $444x - 296y = 1036$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $0 \leq x \leq 50$. Déterminer les couples d'entiers $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).

- 2 Soit un entier naturel strictement positif supérieur à 1.
 On rappelle que : $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$.
 1) Quel est le P.G.C.D de b^2 et $(b - 1)$?
 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $b^2x + (b - 1)y = 1$.
 3) En déduire les solutions de l'équation :
 $25x + 4y = 1$.

- 3 Soit h un entier.

Montrer que l'équation (A) d'inconnues $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $10x - 5y = h$ admet des solutions si et seulement si h est un multiple de 5.

- 1- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (A) pour :
 a) $h = 15$ b) $h = 13$ c) $h = 0$
- 2- Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation :

$$(10x - 5y + 14)(10x - 5y - 14) = 1 .$$

- 4 Soit l'équation (E) : $109x - 206y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

- a) Déterminer PGCD(109; 206).
- b) Donne une solution particulière de (E).
- c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- d) En déduire la solution de (E) telle que :
 $110 \leq y \leq 120$.

Problèmes concrets

- 1 Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
- 2 Un général décide de compter ses soldats, il leur ordonne de se ranger en rang de 16, il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25, il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats, déterminer le nombre de soldats de la troupe.
- 3 Le complexe scolaire Rosey Abantara de Sokorodji Terminus, organise un test entre 57 élèves à majorité garçon. Les garçons et les filles s'affrontent en équipe. L'équipe vainqueur recevra 252 ordinateurs YATTCO à partager équitablement entre chacun des membres.
 Combien de filles et de garçons participent à ce test ?
- 4 Un astronome a observé le lundi 29 septembre 2023 un astéroïde A qui apparaît tous les 105 jours. Six jours plus tard, il a observé l'astéroïde B dont la période d'apparition est de 81 jours. Quelle est la prochaine date d'apparition simultanée des deux astéroïdes aux yeux de l'astronome ?

- 5 Pendant une compétition de formule 1, deux conducteurs Botas et Hamilton font le tour d'un même circuit. Les deux partent en même temps, de la ligne de départ et font plusieurs tours du circuit. Botas fait le tour du circuit en 36 minutes et Hamilton en 30 minutes.
 1) Y a-t-il des moments autres que le départ où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ ?
 2) Quel est le nombre de tours de chacune de ces voitures effectuée entre le départ et le 2^{ème} croisement à la ligne d'arrivée ?

- 6 Deux commerçantes Awa et Deh se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Deh : « je dispose d'un montant égal à m_A Francs » et Deh répond « moi aussi j'ai une somme m_D Francs ». L'entier $m_A = 1x00y2$ dans le système de numération de base 8 et $m_D = x1y003$ dans le système de numération de base 7.

- 1- Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des commerçantes puisse avec la totalité de son

argent acheter un nombre maximum de mangues.

- 2- Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
- 3- Décomposer m_A et m_D en produit de facteurs premiers. En déduire le nombre de diviseurs de m_A et m_D puis PGCD(m_A ; m_D).
- 4- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $m_A u + m_D v = 5$ où u et v sont des entiers relatifs.

7 Composition TSE LPHNS 19-20

Le but de cet exercice est de trouver le nombre de nombre premiers avec N et inférieurs à N .

$$N = 1\ 054\ 053\ 000$$

On donne la fonction d'entiers naturels φ définie par $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

$n \mapsto \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers k tels que $k \wedge n = 1$ et $k < n$.

Par exemple $\varphi(1) = 1$ par convention

$$1 \wedge 2 \text{ et } 1 \wedge 2 \text{ alors } \varphi(2) = 1$$

{ Les entiers naturels inférieurs à 6 sont: 1; 2; 3; 4; 5; $1 \wedge 6 = 1$; $2 \wedge 6 = 2$; $3 \wedge 6 = 3$; $4 \wedge 6 = 2$; $5 \wedge 6 = 1$ } alors $\varphi(6) = 2$

{ Les entiers naturels inférieurs à 8 sont: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; $1 \wedge 8 = 1$; $2 \wedge 8 = 2$; $3 \wedge 8 = 1$; $4 \wedge 8 = 4$; $5 \wedge 8 = 1$; $6 \wedge 8 = 2$; $7 \wedge 8 = 1$ } alors $\varphi(8) = 4$

- 1) Calculer $\varphi(3)$; $\varphi(5)$ et $\varphi(10)$.
- 2) Soit p un nombre premier.
 - a) Conjecturer que $\varphi(p) = p - 1$
 - b) Calculer $\varphi(211)$.
- 3) a) Calculer $\varphi(3) \times \varphi(5)$ puis $\varphi(15)$. Conclure.
- b) On donne deux entiers naturels n et n étrangers. On admet que :

$$\varphi(n \times m) = \varphi(n) \times \varphi(m)$$

Prouver $\varphi(N) = \varphi(4536) \times \varphi(232375)$.

- 4) Donner l'ensemble des diviseurs de 4536.
- 5) En utilisant $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, calculer $\varphi(343)$
- 6) On pose la décomposition de $N' = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times p_3^{k_3} \times \dots \times p_{n-1}^{k_{n-1}} \times p_n^{k_n}$ avec p_i premier et k_i de entiers naturels non nuls.
- a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi(N') = N' \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$
- 7) Déterminer $\varphi(4536)$ et $\varphi(232375)$ puis en déduire $\varphi(N)$.

8 La surprise de MomKadi

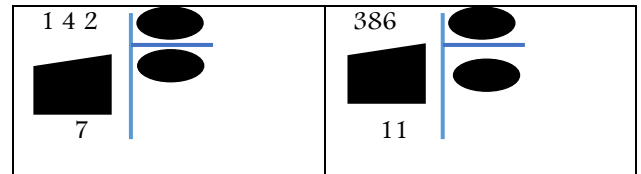
Deux frères Hama et Yoro rendent visite à leur maman MomKadi de façon périodique. Les visites de Hama se font tous les 15 jours et celles de Yoro tous les 123 jours. Le 3 Mars 2021, Yoro rend visite à leur maman. Elle lui fait savoir que son grand-frère Hama a passé il y a 9 jours de cela. Le jour où les deux frères se croisent chez leur maman, ce jour se fait appeler « *Weltari* ». Leur maman MomKadi veut leur faire une surprise pour le prochain *Weltari*. Elle est préoccupée à l'idée de savoir la date du prochain *Weltari*. Aide Momkadi à trouver cette date.

- 9 Le père de Karim lui donne 528 bonbons constitué de bonbons au lait et de bonbon au chocolat. Il décide de mettre les bonbons en paquet par sorte.

Avec les bonbons au chocolat, il réalise des paquets de 9, il lui reste 7 bonbons. Avec les bonbons au lait, il réalise des paquets de 25, il lui reste 11 bonbons.

Son père lui dit que les bonbons au chocolat sont compris entre 100 et 200 et les bonbons au lait entre 300 et 400. Combien de bonbons de chaque sorte a-t-il reçu ?

- 11 Adou est un élève en 5^{ème} année. Son père l'a donné deux divisions à effectuer avant son retour du travail. Par turbulence, son frère Ibrahim verse du café noir sur sa feuille.



Il se souvient d'avoir utilisé le même diviseur. Il se rend dans la classe de TSE d'un lycée pour pouvoir rétablir ses divisions avant le retour de son père. Aide Adou à résoudre son problème.

- 12 Soit dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points $M_n(z_n)$ tels que
$$\begin{cases} z_{n+1} = e^{i(\frac{2\pi}{3})} z_n \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $z_n = e^{i(\frac{2n\pi}{3} + \frac{5\pi}{3})}$
- 2) Soit p un entier naturel. Montrer que les points M_n et M_p sont confondues si et seulement si $n - p \equiv 0[3]$.
- 3) Montrer que le triangle $OM_n M_p$ est rectangle en O si $n - p$ et 2 sont premiers entre eux.
- 4) Montrer que M_n ne peut pas être sur la demi-droite $[Ox)$.

- 13 L'Association des Jeunes pour la Culture de l'Excellence au Mali (AJCEM) est une association qui accompagne les élèves en particulier les filles et œuvre aussi pour la promotion de l'excellence.

Pour la rentrée 2022-2023, M. Wonogo, le secrétaire général du comité de Sénou est chargé de distribuer 180 cahiers et 140 livres à un certain nombre de filles vivants dans des conditions précaires. Le partage est fait de telle sorte qu'un maximum de filles en reçoive et que chaque fille ait le même nombre de livres et de cahiers

1. Combien de filles peuvent en bénéficier ?
2. Combien de cahiers et de livres chaque fille recevra ?

- 14 Le 1^{er} Janvier 2000 était un samedi. Quel jour serait le 1^{er} janvier 2100 ?

« Tant que le grand dédaignera de dévoiler le futur à l'homme, l'humanité se résumerait à deux mots : "Attendre et Espérer" »