

ARITHMETIQUE

Démonstration par récurrence

Exercice 1 :

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a \in \mathbb{R}_+^*; (1 + a)^n > 1 + na$ (Propriété d'Archimède)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*; 2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est un multiple de 29.

Exercice 2 :

Démontrer que :

- $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- $n^3 - n$ est divisible par 3.
- $n^5 - n$ est divisible par 5.
- $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ divisible par 7.

Division euclidienne - Diviseurs et Multiples

Exercice 1 :

- La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r .
Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?
- Détermine le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2n$ par $n + 1$ et $7n + 15$ par $3n + 2$.
- Déterminer les entiers naturels dont la division euclidienne par 16 a un reste est égal au carré du quotient.
- Détermine tous les entiers naturels n tels que $(n - 4)$ divise $(3n + 24)$.
- Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b . Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$. Rétablir la division.
- Trouve les entiers naturels n qui divisé par 4 donne un reste égal au quotient.
- Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire les valeurs possibles de x .
- Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{2019} par 7 et celui de 2019^{2020} par 7.
- Détermine le reste dans la division par 7 des nombres suivants :
 $N = 999888777666555444333222111$
 $M = 999888777666555444333222111000$
- Montre que $1^{1001} + 2^{1001} + 3^{1001} + 4^{1001} + 5^{1001}$ est divisible par 5.
- Montre que : $11/(2^{123} + 3^{121})$
- Détermine le quotient et le reste dans la division euclidienne de $a = 3^{1000} + 28$ par 9.
-

Exercice 2 :

- 1- Quels sont les restes successifs de la division de 7^n par 8. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8
- 2- Soit le nombre $A = 5^{136} + \overline{3x53}^{10}$.
 - a- Quel est le reste de la division 5^{136} par 7 ?
 - b- Déterminer x pour que A soit divisible par 7.
 - 3-

Exercice 3 :

Pour tout nombre entier n , calculer le reste de la division euclidienne par 7 de 5^n et de 4^n . Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

Base de numération :**Exercice 4 :**

- I- Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.
 - 1) Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.
 - 2) Ecrire ce nombre dans le système à base 8.
- II- Soit les nombres N, M, O définies en base 10 par :
 $M = y17x35$; $N = 28x75y$; $O = 13xy45z$
 Déterminer les chiffres x et y dans les cas suivants :
 - 1- N divisible par 3 et 11.
 - 2- M divisible par 9 et 11.
 - 3- O divisible par 8, 9 et 11.

Exercice 5:

- A- Dans le système de numération de base 5, un nombre n s'écrit $\overline{3402}$.
 - 1) Dans quel système de numération k n s'écrit $\overline{735}^k$
 - 2) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit $\overline{831}$
 - 3) Effectuer dans le système de numération de 5, les opérations : $3402 + 1331$; 3402×304 .
- B- L'expression d'un entier naturel N dans une base b est $\overline{1254}$. On sait de plus que l'expression de $2n$ dans la même base est $\overline{2541}$.
 - 1- Déterminer les valeurs de b et n en base 10.
 - 2- Déterminer les expressions en base b de $3n$ et $4n$.

Exercice 6:

Soit $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots \dots a_0}^{10}$

- 1- Etablir le critère de divisibilité par 3 et par 9.
- 2- Etablir le critère de divisibilité par 11 et par 4.

Polynôme et arithmétique**Exercice 1 :**

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

1. Montrer que toute racine entière de P non nulle divise a_0

2. En déduire que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 2 :

Soit un polynôme P à coefficients entiers relatifs : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $u = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible.

Dans cet exercice, on pourra admettre que si $\text{PGCD}(p; q) = 1$ alors $\text{PGCD}(p; q^n) = 1$.

1- Montrer que si u est une racine de P alors p divise a_n et q divise a_0 .

2- On donne $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

a) Montrer qu'une racine de P ne peut être négative.

b) En utilisant 1) et a), en déduire que $\frac{2}{3}$ est une solution de $P(x) = 0$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(x) = 0$.

3- Factoriser $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

Classe d'équivalence modulo n - Congruences

Exercice 1 :

1- Dans la congruence modulo 3,

a) Donner $\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \overline{3n}; \overline{3n+1}; \overline{3n+2}$. Quelle remarque fait-on ?

b) Déterminer $\bar{0} \cap \bar{1}; \bar{1} \cap \bar{2}; \bar{0} \cap \bar{2}$.

c) Comparer $\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$ et $\mathbb{Z}$.

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$a) \bar{4}x + \bar{4} = \bar{0} \quad b) x^2 + \bar{2}x + \bar{4} = \bar{0} \quad c) x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{3} = \bar{0}$$

3- Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}; \begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{2} \\ \bar{x} + \bar{2}y = \bar{4} \end{cases};$$

4- Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 - \bar{6}x + \bar{5} = \bar{0}$ puis dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{3}y = \bar{0} \\ \bar{2}x + y = \bar{5} \end{cases}$$

Exercice 2 : Petit théorème de Fermat

1- Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p .

Prouver que $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .

2- Justifier que $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ est divisible par 37.

3- Montrer que alors que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair.

4- En déduire que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

a) $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$

b) $34x \equiv 2[5]$

c) $x^2 - y^2 = 21$

Exercice 4:

I- Soit n un entier naturel.

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^{2n} \equiv 1[21]$.

- 2- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4^{n+1}} - 2^{4^n} = 2^{4^n}(8^{4^n} - 1)$
- 3- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4^{n+1}} - 2^{4^n} \equiv 0[21]$
- 4- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21]$
- 5- Soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel, montre que : $N = a - b + c - d[11]$
- 6- Calculer les restes de la division par 21 de $64^{16^{8^4^2}}$; $2^{16^{8^4^2}}$ et $32^{16^{8^4^2}}$.
- 7- Montrer que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$.
- 8- Détermine le chiffre des unités des nombres suivants : $2019^{2020^{2021}}$; $1987^{1991^{1883}}$

Décomposition-PGCD-PPCM-Nombres

Exercice 1 :

- 1- Les nombres 4561; 497 sont-ils premiers ?
- 2- Déterminer en utilisant au moins deux méthodes :
 $PGCD(7253; 3451); PGCD(426; 360); PGCD(297; 685); PGCD(297; 685; 17787)$.
- 3- En déduire :
 $PPCM(7253; 3451); PPCM(426; 360); PPCM(297; 685); PPCM(297; 685; 17787)$.

Exercice 2 :

- 1- Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers suivants :
 2400 ; 4675; 9828; 15200; 45864; 792792
- 2- En déduire $PGCD(4586; 792792)$;
 $PPCM(9828; 15200; 792792); PGCD(2400; 4586; 792792)$
- 3- Détermine les $PGCD(2n + 1; n)$; $PPCM(2n + 1; n)$

Exercice 3:

- I- Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:
- 1) $(x \wedge y) + (x \vee y) = y + 9$; $3(x \wedge y) + 2(x \vee y) = 78$; $(x \wedge y) = y + 9$
 - 2) $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$; $\begin{cases} x \wedge y = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$; $\begin{cases} PPCM(x, y) = 120 \\ x^2 + y^2 = 801 \end{cases}$; $\begin{cases} PGCD(x, y) = 15 \\ xy = 900 \end{cases}$;
 $\begin{cases} PGCD(x, y) = 8 \\ x^2 - y^2 = 5440 \end{cases}$; $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$; $PGCD(x, y) + PPCM(x, y) = y + 9$; $\begin{cases} x + y = 651 \\ \frac{PPCM(x, y)}{PGCD(x, y)} = 108 \end{cases}$
- II- Soit deux entiers naturels x et y tels que $x \wedge y = d$ et $x \vee y = m$.
- 1- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 276.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 \leq d \leq 30 \end{cases}$.
 - 2- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 \leq d \leq 50 \end{cases}$.
 - 3- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 108.
 b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 \leq d \leq 15 \end{cases}$.

Exercice 4 :

- 1- Décomposer le nombre 160 en produit de facteurs premiers.
- 2- Déterminer le nombre de diviseurs de 160.
- 3- Le nombre N se décompose $2^a \times 5^b$. Déterminer les entiers naturels a et b sachant que le nombre de diviseurs est le double du nombre de diviseurs de N .

- En déduire le nombre N puis l'écrire dans la base 16.
- 4- Quel est le nombre de diviseurs de 13 320 ?
 - 5- Montre que l'entier naturel $N = 2^{2022} - 49$ n'est pas premier.

Equation diophantiennes-Théorème de Bézout-Théorème de Gauss

Exercice 1 :

Soit un entier naturel strictement positif supérieur à 1. On rappelle que : $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$.

- 1) Quel est le P.G.C.D de b^2 et $(b - 1)$?
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $b^2x + (b - 1)y = 1$.
- 3) En déduire les solutions de l'équation : $25x + 4y = 1$.

Exercice 2 :

Soit h un entier.

- 1- Montrer que l'équation (A) d'inconnues $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $10x - 5y = h$ admet des solutions si et seulement si h est un multiple de 5.
- 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (A) pour :
a) $h = 15$ b) $h = 13$ c) $h = 0$
- 3- Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation :
 $(10x - 5y + 14)(10x - 5y - 14) = 1$.

Exercice 3:

1. Soit l'équation (E) : $109x - 206y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a) Déterminer $PGCD(109; 206)$.
 - b) Donne une solution particulière de (E).
 - c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
 - d) En déduire la solution de (E) telle que $110 \leq y \leq 120$.
2. Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Exercice 4 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $11x + 16y = 0$
- 2) Montre que l'équation $59x + 68y = 1$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 2$
- 4) Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n - 1$ ou $5n$ ou $5n + 1$, n est un entier naturel.

Problème de Synthèse

Exercice 1 :

- I- Un général décide de compter ses soldats, il leur ordonne de se ranger en rang de 16, il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25, il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats, déterminer le nombre de soldats de la troupe.
- II- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (q, p) : $11q - 7p = 1$

- La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste de la division par 77 ?
- Détermine les valeurs de l'entier naturel n inférieurs à 200.

Exercice 2 : On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$

Avec a un entier naturel.

- Démontre que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
- On pose $n = 3$. $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ? Etudier la réciproque de la propriété 1.

Exercice 3 :

Un astronome a observé, au jour j_0 un astéroïde A qui apparaît tous les 105 jours. Six jours plus tard ($j_0 + 6$), il a observé l'astéroïde B dont la période d'apparition est de 81 jours. Quelle est la prochaine date d'apparition simultanée des deux astéroïdes aux yeux de l'astronome ?

Exercice 4 :

Deux voitures partent en même temps en même, de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

- Y a-t-il des moments autres que le départ où les deux voitures se croisent sur la ligne de départ ?
- Quel est le nombre de tours de chacune de ces voitures effectuée entre le départ et le croisement à la ligne d'arrivée ?

Exercice 5 :

Deux commerçantes Halima et Boundi se rendent au marché de Senou pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Deh, je dispose d'un montant égal à m_A Francs et Deh répond moi aussi j'ai une somme m_D Francs. L'entier $m_A = 1x00y2$ dans le système de numération de base 8 et $m_D = x1y003$ dans le système de numération de base 7.

- Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des commerçantes puisse avec la totalité de son argent acheter un nombre maximum de mangues.
- Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
- Décomposer m_A et m_D en produit de facteurs premiers. En déduire le nombre de diviseurs de m_A et m_D puis $PGCD(m_A; m_D)$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $m_A u + m_D v = 5$ où u et v sont des entiers relatifs.

Exercice 6 :

Le vieux Moussa a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1^{er} chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15
- Le troisième est la différence des deux premiers (1^{er} moins le 2^{ème})
- Le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième.
- Le nombre est divisible par 9

Quelle est la combinaison cherchée.

Exercice 7 :

On veut entourer avec un minimum d'arbres d'un champ rectangulaire ayant pour dimension $525m$ et $258m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle . Calculer :

- a. La distance comprise entre deux arbres.
- b. Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Conseil :

Il ne faut pas se limiter à chercher les résultats. *Mobile : (00 223) 83 61 64 70 email : toursamba490@gmail.com*

Ne soyez pas des techniciens.

Liez chaque exercice au cours.