

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1:

Démontre par récurrence que :

1. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $\sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2-1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{2n(n+1)}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7
4. $\forall n \in \mathbb{N} ; n^5 - n \equiv 0 [5]$
5. $\forall n \in \mathbb{N} ; 4^n + 15n - 1$ est multiple de 9
6. $\forall n \in \mathbb{N} ; 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17
7. $\forall n \in \mathbb{N} ; n \geq 5 ; 2^n > 5(n+1)$
8. $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
9. $\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$

Exercice 2:

1. a. Démontre que si le couple (x_0, y_0) est solution de (E), alors y_0 est pair.
b. Détermine les valeurs possibles de $x_0 \wedge y_0$
2. a. Vérifie que $(1, 2)$ est solution de (E)
b. Résous l'équation (E)
3. Détermine les couples (x, y) solution de (E) tels que x et y sont premiers entre eux.
4. $\overline{ac2}^3$ et $\overline{baa}^4$ sont deux écritures du même entier p en base 3 et en base 4.
a. Justifie que $3c+2$ est multiple de 4
b. Déduis-en que $c=2$
c. Détermine les valeurs de a et b (on pourra utiliser 2.1 b.i)
d. Ecris p dans le système décimal

Exercice 3:

A71328

 A, B et C sont indépendants

1. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x+5y=4$
2. Un nombre s'écrit $a = \overline{47}^x$ et $\overline{53}$ dans le système de numération de base y .
Un nombre b s'écrit $\overline{144}$ dans le système de base x et $\overline{171}$ dans le système de base y .

Détermine les entiers naturels a, b, x, y

1. Montre que les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $29x - 13y = 6$ (E) sont $x = 13k + 2$ et $y = 29k + 4 ; k \in \mathbb{Z}$
Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{19} \equiv -2 [29]$

2. Justifie que $2^{28} \equiv 1 [29]$ et en déduire que -8 est solution de (E)'

3. Soit x_0 une solution de (E)'

- a. Montre que $x_0^{28} \equiv 1 [29]$
- b. Montre que $x_0^{57} \equiv -8 [29]$ puis que $x_0 \equiv -8 [29]$

- c. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E)'

- d. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(x-3)^{19} \equiv -2 [29]$

4. Déduis-en dans $\mathbb{Z}$ les solutions du système
$$\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 [29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2 [13] \end{cases}$$

1. Détermine tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 = 2xy + 15$

2. Montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11

3. Soit $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b sachant que q et r restent invariants si on augmente a de 52 et b de 4. Calcule q

4. $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$; Démontre par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Prof : Mohamed TRAORE

« La répétition est la mère de la maîtrise »

Exercice 3 : BAC Côte d'Ivoire 2019

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$

A. 1. Écris m dans la base 2 dans le cas où $a = c = 1$ et $b = 2$

2. On suppose que : $m \equiv 0 [27]$

i/ Démontre que $10^3a + 10b\overline{c} \equiv 0 [27]$

ii/ Déduis-en que $10b\overline{c} + a \equiv 0 [27]$

iii/ Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

B. Dans cette partie on suppose que $a > c$
On pose $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$

1. Justifie que $d = 99u$

2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel

3. On suppose que $b = a + c$

i/ Justifie que $m = 11(10a + c)$

ii/ Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.

4. On suppose que $a = b + c$

i/ Justifie que $d = 3^2 \times 11b$

ii/ Justifie que $m = 110b + 101c$

iii/ Démontre que les entiers naturels m qui sont 1^{er} avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$; $c \neq 0$; $b + c$

n'est pas divisible par 3; b et c sont premiers entre eux.

iv/ Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d .

Exercice 4 :

Mr Dembélé a déposé à la BDM-SA en Espagne une somme de 14677¹³ en Francs CFA au taux d'intérêt de 7,5% l'an dans le but de délimiter son Champ. Après une année d'épargne il décide de retirer la totalité de son argent, afin de délimiter son Champ par des poteaux, à la forme (son Champ) d'une trapèze dont les bases mesurent respectivement 119m et 91m et les 2 autres côtés mesurent 56m et 35m.

Pour délimiter le champ, M. Dembélé a besoin des poteaux à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

Prix unitaire du poteau est 9134¹² FCFA

a. Écris la somme déposée à la banque puis le prix unitaire de poteaux dans le système décimal

b. Détermine le montant retiré par M. Dembélé après une année d'épargne

c. Quelle est la distance entre deux poteaux ?

d. M. Dembélé pourra-t-il délimiter son champ après une année d'épargne ?

Exercice 5 :

1. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E):

$$35x + 97y = 1 \text{ puis en déduire la}$$

solution de l'équation (E'): $35x + 97y = -5$

2. Résous dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} 3x \equiv -2 [7] \\ -24x \equiv [11] \end{cases}$$

$$[11]$$