

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1:

Démontre par récurrence que :

1. $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$; $\theta \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^n (2n+1) = (n+1)(-1)^n$

3. $2^{3n+1} + 3 \times 5^{2n+1}$ est un multiple de 17

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $n! \geq 2^{n-1}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}$; $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

6. $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^{2n+2} + 3$ est divisible par 19

Exercice 2:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5$

1. a. Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} \equiv a_n [24]$

b. Montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a $a_n \equiv 0 [24]$

2. Soit $p > 7$ un entier premier

a. Prouve que $a_{p-1} \equiv 0 [p]$

b. En deduire que l'entier $a_{p-1} \equiv 0 [24p]$

3. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

(E): $a_3 x - a_2 y = 5 a_1$

a. Vérifie que (E) $\Leftrightarrow$ (F): $44x - 7y = 5$

b. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

4. a. $\forall q \in \mathbb{N}$; on pose : $x_q = 7q + 6$
et $y_q = 44q + 37$

Montre que le couple (x_q, y_q) est sol de l'équation (E), puis en deduire toutes les valeurs de l'entier naturel q pour lesquelles $x_q \wedge y_q = 1$.

Exercice 3:

Q1. La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

Q2. Détermine l'entier naturel n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

Q3. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier b sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$; retablir la division.

Q4. Détermine les chiffres x et y pour que le nombre $n = 43x57y$ soit divisible par 15 et 2.

Q5. Trouve dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 45 et tel que le couple (a, b) soit solution de l'équation $x^2 - y^2 = 24$

Q6. Un entier naturel s'écrit $xy7$ dans le système décimal et $y00x$ dans le système à base 8.

a. Sachant que $y = x - 4$. Détermine x et y

b. Ecrire le nombre en système décimal; binaire; octal; octa-décimal et hexa-décimal.

Q7. 1. Détermine le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7

2. Détermination suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de 11^n par 7.

Prof: Mohamed TRAORE

« L'égo est le premier destructeur de valeur dans toute collaboration »

Exercice 4 :

Détermine les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

- $$\begin{cases} a+b=5664 \\ a \wedge b=356 \end{cases} \quad a < b$$
- $$\begin{cases} a \wedge b=5 \\ a \vee b=60 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a \wedge b=12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$$
- $$(a \wedge b) + (a \vee b) = b + 9$$
- $$\begin{cases} a+b=56 \\ a \vee b=190 \end{cases} ; a > b$$
- $$\begin{cases} 2m+3d=78 \\ m=a \vee b \text{ et } d=a \wedge b ; a < b \end{cases}$$

Exercice 5 :

- On considère l'équation : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
(E) : $8x + 5y = 1$
 - Donne une solution particulière de (E)
 - Résous (E)
- Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) d'entiers vérifiant

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
 - Montre que le couple $(a, -b)$ est solution de (E)
 - Quel est le reste de la division euclidienne de N par 40 ?
- a. Résous l'équation $8x + 5y = 100$
 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
 - Au VII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie, dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes, 5

pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 6 :

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $x > y$;

$$\begin{cases} (x-y)^2 = x+y & (1) \\ x \vee y = 495 & (2) \end{cases}$$

- On pose $z = x - y$ et on considère comme nouvelle inconnue le couple (z, y)
 - Quelle relation vérifie z et y ?
 - En déduire que $2y$ est un produit de deux entiers consécutifs.
 - En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes.

$$\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} x = (k+1)(2k+1) \\ y = k(2k+1) \end{cases}$$
- On considère que les solutions du système sont sous la forme :

$$\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*$$
 - Donne en fonction de k , le $x \wedge y$
 - En déduire le $x \vee y$ en fonction de k
 - Montre que le double $2(x \vee y)$ est le produit de 3 entiers consécutifs.
 - Résous dans ce cas le système.