

Exercice1 :

- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2-1)}{30}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n \frac{p}{(p+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
- ✓ Rappel : $n! = n(n-1)(n-2) \dots * 3*2*1$ et $(n+1)! = (n+1)n*(n-1)!$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^n > n$
- ✓ Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} * \text{on a} : \sum_{p=1}^n p(n-p) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$
- ✓ Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p \cdot 2^{p-1} = (n-1)2^n + 1$
- ✓ Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$: $\sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
- ✓ Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli soit $a > 0 \forall n \in \mathbb{N} (1+a)^n \geq 1+na$
- ✓ Pour tout entier naturel n non nul : $1*1! + 2*2! + \dots + n*n! = (n+1)! - 1$
- ✓ $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, la suite (u_n) est définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2\cos\alpha \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- ✓ 1. Calculer u_1 et u_2
- ✓ 2. Démontrer par récurrence que $u_n = 2\cos(\frac{\alpha}{2^n})$
- ✓ Soit x un réel différent de 1, démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$:
- ✓ $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Exercice2 :

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 - 10x^2 - 25x - 21$

1. Calculer $P(7)$. En déduire que : $P(x) = (x-7)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3. Un entier naturel s'écrit $\overline{5531}$ dans le système de numération de base t et $\overline{3676}$ dans le système de numération de base $t+1$, calculer t et donner l'écriture de n dans le système décimal.

Exercice 3 :

Soit a un entier naturel et x un nombre qui s'écrit $\overline{1335}$ dans la base a

1. Donner son écriture dans la base $(a+1)$
2. Déterminer a sachant que ce nombre écrit dans la base dix est inférieur ou égal à 500.

Exercice4 :

Un entier s'écrit $a101$ dans la base 3 et 101 dans la base 7. Que vaut a ? Quel est cet entier ?

Exercice 5 :

On considère les trois entiers naturels a , b et c qui s'écrit dans la base n . $a=111$ $b=114$ et $c=13054$. Déterminer n sachant que $c=ab$. Déterminer l'écriture de chacun des nombres a , b et c dans le système décimal

Exercice6 :

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

1. Vérifier que $P(-3) = 0$ et $P(10) = 1443$
2. Vérifier que $P(x) = (x + 3)(x^2 + x + 1)$
3. Dédire que 1443 est divisible par 13

Exercice 7 :

Soit x un entier naturel supérieur ou égal à 5. On considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x+1)$

1. Ecrire n et n' dans le système de base x .
2. Ecrire $n+n'$ dans le système de base $x+1$ et donner le quotient q (en base x de la division euclidienne de $n+n'$ par $x+1$).
3. Déterminer les entiers a et b tels que $q = \overline{ab}^x * \overline{aaa}^x$

Exercice8 :

Soit n un entier naturel

1. Trouver, suivant les valeurs de n les restes de la division de 5^n par 13
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13 ;

Exercice 9 :

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui appartient périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de l'exercice est déterminé la date de ce jour J_1

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1
Montrer que le couple (u,v) est solution de l'équation $(E_1): 35x - 27y = 2$
2. Déterminer toutes les solutions de (E_1) , et en déduire la solution permettant de déterminer J_1
3. a) Combien de jours s'écrouleront entre J_0 et J_1 ?
b) Le jour J_0 était le 7 décembre 1999 ; quelle est la date exacte du jour J_1 ? (l'année 2000 était bissextile)
c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux autres ?

Exercice 10 :

Déterminer les couples (x,y) d'entiers relatifs tels que : $x^2 - y^2 = 39$; $x^2 - y^2 = 56$

$$4x^2 = y^2 + 1, xy = 5; xy = -10; x^2 = y^2 + 21; (x+2)(y-3) = 12; x^2 - y^2 = 5$$

$$xy - 3y^2 = 18, x^2 - xy = 240, x^2y + xy^2 = -12; x^2y - xy^2 = 5, (x-27)(y+12) = -xy$$

$$6x + y - 3xy + 22 = 0, x + 2xy = 34; (x+1)(y-1) = 5$$

Exercice 11 :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{6}{5n^3+n}; \quad \frac{11}{3^{8n} \cdot 5^4 + 5^{6n} \cdot 7^3}; \quad \frac{9}{4^n - 3n - 1}$

Exercice 12 :

1. Soit le système $\begin{cases} 3x + y = a \\ 3x - y = b \end{cases}$ où x et y sont les variables et a et b sont des constantes

Montrer que les solutions du système sont $x = \frac{a+b}{6}$ et $y = \frac{a-b}{2}$

2. Résoudre l'équation $9x^2 = y^2 + 20$ où x et y sont des entiers.

Exercice 13 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5

$7 \cdot 3^{5n} + 4$ Est divisible par 11, $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 ; $3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2$ est divisible par 8 ; 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$; $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.

Exercice 14 :

On donne l'égalité $10^3 = 13 \cdot 76 + 12$. Soit n un entier naturel

1. Déterminer suivant les valeurs de n , le reste de la division de 10^{3n} par 13
2. Déterminer, suivant les valeurs de n , le reste de la division de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13.

En déduire le reste de la division euclidienne par 13 de 11000 000 000 000

3. Quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25 \cdot 10^{15} + 1$

Exercice 15 :

En utilisant l'algorithme d'Euclide

1. Déterminer le PGCD de 1064 et 700
2. Déterminer un couple d'entiers relatifs p et q tels que $185p - 401q = 1$

Exercice 16 :

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$ où x et y désignant deux entiers relatifs

1. Justifier par Théorème le fait que l'équation (E) admet des solutions.
2. Vérifier que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).
3. Trouver toutes les solutions de l'équation (E).
4. En déduire le(s) couple(s) d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution(s) de (E) tel(s) que $0 \leq u \leq 25$

Exercice 17 :

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x, y) = 2x - 3y$

1-a) Calculer $f(5, 3)$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $2x - 3y = 1$

2-Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = f(5^n, 3^n)$

a) Trouver suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de X_n par 7.

b) Montrer que $X_{2015} - 5$ est divisible par 7.

Exercice 18 :

On considère l'équation (E) : $36x - 25y = 5$ où x et y des entiers relatifs.

- a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $36x + 25y = 1$
- b) Donner alors une solution particulière de (E)
- c) Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?
- d) $(x; y)$ étant une solution particulière de (E) ; on appelle PGCD de x et y égal à d .
 - i) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
 - ii) Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux

Exercice 19 :

On pose $a = 1234$ et $b = 1200$

- a) Déterminer $\text{pgcd}(a, b) = d$ et $\text{pppcm}(a; b) = m$
- b) (E) est l'équation dans $\mathbb{Z}^2$: $ax + by = 2dm$

Donner une solution particulière de (E)

Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 20 :

Trouver toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $n = \overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

Déterminer les chiffres x, y et z pour que le nombre dont l'écriture décimale est $n = \overline{13xy45z}$

Soit divisible par 8, 9 et 11.

Soit le nombre n qui s'écrit dans la base dix, $n = \overline{y17x35}$ trouver x et y pour que n soit divisible par 9 et 11.

Déterminer les chiffres x et y du nombre N dont l'écriture décimale est $N = \overline{28x75y}$ pour que ce nombre soit divisible par 3 et 11.

Exercice 21 :

- ✓ Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $(a \leq b)$
 $\text{PGCD}(a, b) = 18$ et $a + b = 216$
- ✓ Déterminer les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $\begin{cases} a + b = 312 \\ a \cdot b = 1980 \end{cases}$
- ✓ Déterminer les couples d'entiers naturels tels que $\begin{cases} a + b = 5664 \\ a \Delta b = 354 \end{cases}$
- ✓ Déterminer les couples d'entiers naturels tels que $\begin{cases} a \cdot b = 1008 \\ a \vee b = 168 \end{cases}$
- ✓ Quels sont les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $(a > b)$

On a $a^2 - b^2 = 405$ et $a \Delta b = 3$

- ✓ Soit deux entiers naturels non nuls tels que $(a < b)$. Déterminer a et b lorsque :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 325 \\ avb = 30 \end{cases}$$
- ✓ Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que :
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5440 \\ a \Delta b = 8 \end{cases}$$
- ✓ Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $m - 9d = 13$ ou $m = \text{ppcm}$ et $d = \text{pgcd}$