

RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE

Sujet de la Réunion 2000:

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = (n^3 - n^2 - 12n)$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

- 1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.
- 2) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β .
 - a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n .
 - b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
 - c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est un multiple de 5
- 3) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
- 4)
 - a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD de a et b .
 - b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particulier $n=11$ et $n=12$

- 1) La 1^o question est simple, mais il faut gagner du temps : $a = n \times (n^2 - n - 12)$. Très souvent, les élèves calculent Delta, puis les solutions de l'équation $(n^2 - n - 12) = 0$. Or, vous savez d'après la question qu'il faut montrer que $n-4$ divise a . Nécessairement $(n-4)$ apparaît en facteur. Pour arriver à n^2 , il faut multiplier par 12 et pour arriver à -12 , il faut multiplier -4 par 3. La factorisation est finie, sans calcul de Delta : $a = n \times (n-4) \times (n+3)$. On agit de même pour b . Pas de calcul de Delta : On doit factoriser par $(n-4)$. Il faut multiplier n par $2n$ pour obtenir $2n^2$ et $b = (n-4) \times (2n+1)$. Ceci prouve par définition que $(n-4)$ divise a et b , ou que a et b sont divisibles par $(n-4)$ ou encore que a et b sont des multiples de $(n-4)$. On peut déjà remarquer que $(2n+1)$ et $(n+3)$ interviennent immédiatement après dans la question 2. De même on demande de montrer ensuite que n et $2n+1$ sont premiers entre eux à la question 3. Dans un exercice, il faut chercher et voir les rapports entre les questions.

- 2) A) L'idée naturelle est d'exprimer n en fonction de α puis de β . Mais l'erreur à ne pas commettre consiste à exprimer n en fonction de α sous la forme : $n = \frac{\alpha-1}{2}$. Vous obtiendrez immédiatement une critique : on fait de l'arithmétique et on traite d'entiers relatifs, pas de rationnels ou de fractions. Vous avez divisé un entier par 2 sans même vous assurer que 2 divise $2\alpha-1$. Pour ne pas avoir ce problème, on exprime $2n$ en fonction de α et $2n$ en fonction de β . Ce qui donne : $2n = \alpha - 1$ et $2n = 2\beta - 6$. On obtient alors par transitivité de l'égalité : $\alpha - 1 = 2\beta - 6$, soit $2\beta - \alpha = 5$.

- B) Soit $d = (\alpha \wedge \beta)$; d divise α et d divise β et divise toute combinaison linéaire de α et β donc $2\beta - \alpha = 5$ et d divise 5. ceci signifie que $d=1$ ou 5 car un pgcd est positif. Cette propriété de divisibilité est fondamentale.

C) On va voir plusieurs méthodes : Dire que α est un multiple de 5 peut se traduire par : $\exists k \in \mathbb{Z} / \alpha = 5k$ ou bien $\alpha \equiv 0[5]$ ou enfin : $5 | \alpha$. De plus, quand on vous demande une équivalence, pensez à faire le sens direct puis la réciproque. Vous avez tendance à mettre des équivalences partout, sans les justifier et souvent, il y a une seule équivalence qui est fautive, mais tout le raisonnement est faux.

1° méthode

- Si $\exists k \in \mathbb{Z} / \alpha = 5k$ et $\exists k' \in \mathbb{Z} / \beta = 5k'$ alors comme $\beta = n+3$, $n+3 = 5k'$, donc $n-2 = 5k' - 3 - 2 = 5(k'-1)$ et donc $n-2$ est un multiple de 5. Il faut aussi le montrer avec α ; $\alpha = 2n+1$ et $\alpha = 5k$, donc $2n+1 = 5k$. Encore une fois l'erreur à ne pas commettre serait de diviser par 2 ! Il faut faire apparaître $n-2$, mais multiplié par 2, cela donne $2n-4$. On retranche 4 et on ajoute 4, cela ne change rien. $2n-4+4+1 = 5k$ et $2 \times (n-2) = 5k - 5 = 5 \times (k-1)$. D'après la définition, 5 divise $2(n-2)$, mais 2 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(n-2)$, donc $n-2$ est un multiple de 5.
- Il faut maintenant montrer la réciproque : Si $n-2$ est un multiple de 5, $n = 5k+2$, or, $\beta = n+3$, donc $\beta = 5k+2+3 = 5k+5 = 5(k+1)$ et β est un multiple de 5. De même $\alpha = 2n+1$, donc $\alpha = 2(5k+2)+1 = 5 \times 2k+5 = 5 \times (2k+1)$ et α est un multiple de 5.

2° méthode : les congruences

- $\alpha \equiv 0[5]$ et $\beta \equiv 0[5]$, or $\beta = n+3$ donc $n+3 \equiv 0[5]$ et $n-2 \equiv -5 \equiv 0[5]$. De même $\alpha = 2n+1$ donc $2n+1 \equiv 0[5]$ et $2(n-2) = 2n-4 \equiv -5 \equiv 0[5]$, or 2 et 5 sont premiers, d'après le théorème de Gauss, $n-2 \equiv 0[5]$; $n-2$ est bien un multiple de 5. réciproquement, si $n-2 \equiv 0[5]$, $n+3 = 5 \equiv 0[5]$ donc $\beta = n+3 \equiv 0[5]$, $2n \equiv 4[5]$ et $2n+1 \equiv 5 \equiv 0[5]$ donc $\alpha \equiv 0[5]$

- 3° méthode :
trouver le rapport entre $n-2$, $\alpha \equiv 0[5]$ et $\beta \equiv 0[5]$. Or $\alpha - \beta = 2n+1 - n-3 = n-2$. Il est donc clair que si α et β sont des multiples de 5, $\alpha - \beta$ aussi et par suite $n-2$. Réciproquement si $n-2$ est un multiple de 5, $\alpha - \beta$ aussi. Or $\beta = n+3 = 5(k+1)$ l'est aussi, donc α aussi.
- 4° méthode : divisibilité
 $5|n-2 \Rightarrow 5|n-2+5 = n+3 = \beta$,
 $5|n-2, 5|n+3 = \beta \Rightarrow 5|n-2+n+3 = 2n+1 = \alpha$. Réciproque :
 $5|\alpha = 2n+1$ et $5|\beta = n+3$ donc $5|\alpha = 2n+1 - n-3 = n-2$. CQFD ;
C'est peut-être la méthode la plus efficace, car l'une des seules propriétés est que si a divise 2 nombres, il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

3) 2 méthodes :

- 1° méthode

On divise $2n+1$ par n : $2n+1 = 2 \times n + 1$, puis $n = 1 \times n + 0$, le dernier reste non nul est 1. C'est le PGCD des 2 nombres qui sont donc premiers entre eux.

- 2° méthode

Théorème de Bézout : $2n+1-2n=1$. Il existe 2 relatifs (1,-2) tels que $au+bv=1$, d'après ce théorème, ces 2 nombres sont premiers entre eux.

4) a) Question délicate qui intègre toutes les questions.

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(a,b) &= \text{PGCD}(n \times (n-4) \times (n+3), (n-4) \times (2n+1)) = \\ &= (n-4) \times \text{PGCD}(n(n+3), (2n+1)) = (n-4) \times \text{PGCD}(n\beta, \alpha). \text{ Or } n \\ &\text{et } \alpha = 2n+1 \text{ sont premiers entre eux. Nous allons montrer que} \\ &(n \wedge \alpha) = 1 \Rightarrow \text{PGCD}(n\beta, \alpha) = \text{PGCD}(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

Soit $D_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et β et $D_{\alpha,n\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et $n\beta$. Si $d \in D_{\alpha,\beta}$, $d \mid \alpha$ et $d \mid \beta$, donc $d \mid n\beta$ et $d \in D_{\alpha,n\beta}$. On vient de montrer que $D_{\alpha,\beta} \subset D_{\alpha,n\beta}$. Montrons l'inclusion réciproque ; Soit $d \in D_{\alpha,n\beta}$, on suppose que $d > 1$ (si $d=1$, d appartient de manière triviale à $D_{\alpha,\beta}$). $d \mid \alpha$ et $d \mid n\beta$, donc $d \mid n\alpha$ et par suite $d \mid n(\alpha - \beta)$. Soit m le pgcd de n et d ; m divise d et n , mais d divise α , donc m divise α et n , or $(n, \alpha) = 1$, donc $m = 1$. d'après le théorème de Gauss, $d \mid (\alpha - \beta)$, mais d divise α ; d divise toute combinaison linéaire, donc aussi β . Par suite $d \in D_{\alpha,\beta}$ et $D_{\alpha,n\beta} \subset D_{\alpha,\beta}$. Au total, ces deux ensembles sont égaux et par suite les PGCD de ces deux ensembles sont égaux.

On a donc maintenant $PGCD(a,b) = (n-4) \times PGCD(\beta, \alpha)$; d'après 2b, $PGCD(\beta, \alpha)$ vaut 1 ou 5. D'après 1.C, ce pgcd vaut 5 si et seulement si $n=5k+2$. Donc si $n=5k+2$, $PGCD(a,b) = (n-4) \times 5$ et sinon, $PGCD(a,b) = (n-4)$.

Une erreur à ne pas commettre serait de dire que si d divise bc et d ne divise pas b alors d divise c . Ceci est faux en général.

En cas de problème, d'erreur ou de suggestions écrire à :



syracuse.omega@free.fr