

Exercices – Arithmétique

Problème 1 (8pts) les parties A et B sont indépendantes

A) Résoudre dans N^2 l'équation : $x^3 - y^3 = 63$ 2pts

B) On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26. On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « * » considéré comme un caractère.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

s	t	u	v	w	x	y	z	*
18	19	20	21	22	23	24	25	26

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

- Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \rightarrow 0, b \rightarrow 1, \dots, z \rightarrow 25$. On associe au séparateur « * » le nombre 26. On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1, $\dots$, z a pour rang 25 et le séparateur « * » a pour rang 26.

- Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27. On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

- Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$. Exemple : $s \rightarrow 18, g(18) = 21$ et $21 \rightarrow v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1. Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à-dire invariants par g. En déduire les caractères invariants dans ce codage.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x + 3 \pmod{27}$ alors $x \equiv 7y + 6 \pmod{27}$. En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.
3. Proposer une méthode de décodage.
4. coder le mot « courage ».
5. Décoder le mot « v f v ».

Exercice 2

1°) Existe-t-il un entier N qui s'écrit $\overline{abcca}^5$ en base cinq et $\overline{bbab}^8$ en base huit.

2°) Déterminer x, y, z sachant que : $\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$.

3°) Déterminer le nombre entier A du système décimal qui s'écrit :

$$\overline{ab7}^9 \quad \text{et} \quad \overline{a7b}^8.$$

4°) En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$ montrer que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$.

Exercice 3

1°) Le nombre entier naturel N , qui s'écrit $\overline{341}$ dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}^a$ en base a .

a) Trouver un encadrement de a^3 .

b) Déterminer a et vérifiez.

2°) Développer $(k + 1)^5$. Ecrire le nombre 13^5 dans le système de base 12.

Exercice 4

1°) Soient x, y , et z trois entiers naturels avec $x \geq 2$. On suppose qu'en base x ; y s'écrit : $\overline{304}$ et z s'écrit : $\overline{100}$.

a) Quelle est l'écriture en base x du produit yz ?

b) Sachant que l'écriture décimale de $y + z$ est 104, déterminer les écritures décimales de x et du produit yz .

2°) Les nombres x, y et z étant trois entiers naturels, on suppose que l'écriture en base x de y est 131 et que l'écriture de z en base x est 101. Montrer que l'on peut sans connaître x , exprimer dans le système de base x le produit xy .

Exercice 5

Les entiers $\overline{cb}, \overline{bc}, \overline{ac}$ sont écrits dans le système à base dix. Déterminer les chiffres a, b , et c sachant que :

$$\begin{cases} a + b + 5c + 3 = \overline{cb} \\ \overline{bc} - \overline{ac} = 10c \end{cases}$$

Exercice 6 (5pts)

Partie A : Arithmétique

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} p \gcd(x; y) = 3 \\ 4x + 7y = 129 \end{cases} \quad \text{Où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1- a) Vérifier que le couple $(2; 5)$ est une solution de l'équation (E) : $4m + 7n = 43$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2- Déduire tous les couples entiers naturels solutions du système (S).

Partie B : Géométrie de l'espace

$ABCD$ est un tétraèdre de volume $V = 1 \text{ m}^3$ tel que : $AB = \sqrt{3} \text{ m}$; $AC = 3\sqrt{2} \text{ m}$ et $\vec{AB} \bullet \vec{AC} = -6$.

1- a) Montrer l'identité suivante : $(\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|)^2 + (\|\vec{AB} \bullet \vec{AC}\|)^2 = (\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|)^2$.

b) En déduire que : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|)^2 - (\|\vec{AB} \bullet \vec{AC}\|)^2}$.

c) Déduire : l'aire du triangle ABC puis la distance DH où H désigne le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

2- Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'ensemble (C) intersection du plan (ABC) et de la sphère (S) de centre D et de rayon $R = \sqrt{6}$.

Exercice 7

Partie I : Soit (u, v) un couple d'entiers tels que $u^2 + uv + v^2 \equiv 0[17]$.

1. Vérifier que $u^3 \equiv v^3 [17]$, en déduire que $u^{15} \equiv v^{15} [17]$.

2. On suppose dans cette question que 17 ne divise pas u .

(a) Montrer que $17 \wedge v = 1$ et que $u^{16} \equiv v^{16} [17]$.

(b) Dédire que $u \equiv v [17]$.

3. Montrer que $u \equiv 0 [17]$ et $v \equiv 0 [17]$.

Partie II : On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation : $(E) : x^3 - y^3 = 2023 (x^2 + y^2)$. Soit (x, y) une solution de (E) . On pose $d = x \wedge y$ et $x = ad, y = bd$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $d (a^3 - b^3) = 2023 (a^2 + b^2)$ et $a \wedge b = 1$.

2. Dédire que $b < a$ et $a^2 + ab + b^2$ divise 2023.

3. Montrer que $17 \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$. En dédire que $a^2 + ab + b^2 = 7$.

4. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) .

Exercice 8

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = 2^n + 5^n + 3 \times 10^n - 1$$

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 5.

1. (a) Montrer que u_n est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $u_{2024} \equiv 0 [10]$.

2. (a) Montrer que : $u_p \equiv 36 [p]$.

(b) En dédire que p et u_p sont premiers entre eux.

3. (a) Montrer que : $u_{p-1} \equiv 4 [p]$.

(b) En dédire que p et u_{p-1} sont premiers entre eux.

(c) Si de plus $p \neq 13$, montrer que : $p \wedge (3u_p - u_{p-1}) = 1$

4. (a) Montrer que : $10u_{p-2} \equiv 0 [p]$

(b) En dédire que u_{p-2} est divisible par p .