

Exercice 1 :

1) Démontrer par récurrence que :

$$a) \forall x \in \mathbb{N}^* : \sum_{p=1}^n P(P+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$b) \forall x \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$c) \forall x \in \mathbb{N} : \sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$d) \forall x \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$$

$$e) \forall x \in \mathbb{N}^* - \{1\} ; a \in \mathbb{R}_+^* ; (1+a)^n > 1+na$$

$$f) \forall x \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 4 ; 2^n > n^2$$

$$g) \forall x \in \mathbb{N} ; \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$h) \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

$$i) \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3 \times 2^k} + \frac{1}{\sqrt{2}} k \right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 2^{n-1}} + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$j) \sum_{k=0}^n \left(\frac{7-3^{n+1}}{2 \times 3^n} \right) = -\frac{3}{2}(n+1) + \frac{21}{4} - \frac{7}{4 \times 3^n}$$

$$k) \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2k+1} \right)^2 \geq 2k+3$$

Exercice 2 :

$$\text{On donne } \sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) a) Déterminer tous les polynômes de degré 3 tels que :

$$f(x+1) - f(x) = x^2$$

$$b) \text{ Retrouver le résultat : } \sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2) \text{ On donne } \sum_{p=1}^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a) Calculer $\sum_{p=1}^n p^3$ par une méthode analogue à celle de la première question

b) En déduire une expression de $E_n = \sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2)$.

Exercice 3 :

1) Déterminer dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b .

$$a = 3453 \text{ et } b = 13 ; \quad a = -1454 \text{ et } b = 22$$

$$a = 11111 \text{ et } b = 333 ; \quad a = -994567 \text{ et } b = 3432$$

2) La somme de 2 entiers naturels a et b avec ($a > b$) est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Déterminer les entiers a et b .

3) Soient 2 entiers naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Déterminer a et b .

4) Dans l'écriture $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b où a , b , q et r sont des entiers naturels.

a) Calculer b et q sachant que : $a = 557$, $r = 89$.

b) Calculer b et r sachant que : $a = 1517$, $q = 75$.

5) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $4231 = 713x + y$ d'inconnues x et y .

6) Soit $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b . Calculer q sachant que q et r restent invariants si l'on augmente a de 52 et b de 4.

Exercice 4 :

- 1) Ecrire la division euclidienne de -5000 par 17
- 2) La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels.
- 3) Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.
- 4) Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.
- 5) Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.
- 6) Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?
- 7) Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Exercice 5 :

Soit la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

- a) Montrer que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où a, b sont deux entiers naturels à déterminer.
- b) Pour quelle valeur de n , $A(n)$ est-il un entier naturel.

Exercice 6 :

- 1) Dans chacun des cas suivants, vérifier si les nombres a et b sont premiers entre eux :
 $a = 122$ et $b = 32$; $a = 85631$ et $b = 111$
 $a = 712379$ et $b = 1551$; $a = 96777$ et $b = 45777$
- 2) Dans chacun des cas suivants, déterminer le PGCD et le PPCM des réels a et b .
a) $a = 114$ et $b = 22$; **b)** $a = 999$ et $b = 18$
c) $a = 14422$ et $b = 332$; **c)** $a = 6666$ et $b = 111$

d) $a = 42137$ et $b = 41$; e) $a = 1655$ et $b = 77$

3) Δ et m désignent respectivement le PGCD et le PPCM des entiers a et b .

Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

a) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$; b) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \Delta = 90 \\ m = 180 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$ e) $\begin{cases} PGCD(a; b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$; f) $\begin{cases} PPCM(a; b) = 168 \\ a \times b = 1008 \end{cases}$; e) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

4) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer : $354 \wedge 25$, et trouver deux entiers relatifs h et l tels que : $354h + 25l = 1$.

Exercice 7 :

- 1) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels non nuls tels que : $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}$
- 2) a) Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.
b) Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient : $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$
- 3) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$
- a) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$
- b) Résoudre alors l'équation (E) .
- 4) Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient : $x^2 = y^2 + 21$

Exercice 8 :

- 1) Trouver l'entier N du système décimal qui s'écrit : $\overline{ab7^9}$ et $\overline{a7b^8}$
- 2) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.
b) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que :
 $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ vérifiant la relation : $\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 < d < 50 \end{cases}$

Exercice 9 :

- 1) a) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers
 b) Démontrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$
 c) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ le système $\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$ ou m est le PPCM de a et b
- 2) On note d le PGCD de a et b ; α et β les quotients de a et b par d .
 Déterminer a et b sachant que : $\alpha + \beta = 7$ et $ab = 60d$

Exercice 10 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x - 9y = 13$
- 2) Déterminer tous les éléments (a, b) de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation :
 $PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13$
- 3) Déterminer les entiers naturels n tels que :
 a) $PPCM(n; 6) = 96$; b) $PPCM(n; 72) = 216$
- 4) Déterminer l'entier naturel n tel que : $\begin{cases} 600 < n < 1100 \\ PGCD(n; 630) = 105 \end{cases}$

Exercice 11 :

Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrit $\overline{abcd}$, et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

- 1) Montrer que si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N$ est divisible par 7.
 En déduire que pour cette valeur de a , N est divisible par 7.
- 2) Montrer que $10N - 3a$ est multiple de 7.
 En déduire que si N est divisible par 7, alors $a = 7$.

Tapez une équation ici.

Exercice 12 :

- 1) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 3x + 2 = 0$
- 2) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

3) Résoudre :

- a) $3x + 5 \equiv 4[7]$
- b) $6x + 5 \equiv 2[9]$
- c) $6x + 5 \equiv 1[9]$
- d) $4x^2 + 5x - 1 \equiv 0[7]$
- e) $x^3 + 2x^2 + 5 \equiv x - 4[9]$

Exercice 13 :

- 1) Trouver le reste de la division par 13 du nombre $N = 100^{1000}$.
- 2) Trouver l'écriture décimale des nombres suivants :
 $\overline{1A}^{16}$; $\overline{FF0}^{16}$; $\overline{1110}^2$; $\overline{1010100}^2$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
 $3x = 4$; $x^2 + x = 0$; $x^3 = 0$

Exercice 14 :

- 1) Déterminer un entier naturel x tels que 123, 140 et 156 forment une progression arithmétique
- 2) Déterminer x dans chacun des cas suivants :
 a) $\overline{2101}^3 = \overline{224}^x$; b) $\overline{50500}^x = 20800$
 c) $\overline{46}^x + \overline{53}^x = \overline{132}^x$; d) $\overline{36}^x + \overline{45}^x = \overline{103}^x$

Exercice 15 :

- 1) existe-t-il un entier N qui s'écrit $\overline{abcca}^5$ en base cinq et $\overline{bbab}^8$ en base huit.
- 2) Déterminer x ; y ; z sachant que : $\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$.
- 3) Déterminer le nombre entier A du système décimal qui s'écrit :
 $\overline{ab7}^9$ et $\overline{a7b}^8$.
- 4) En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$. Montrer que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a :
 $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (131)^2$.
- 5) Le nombre entier naturel N , qui s'écrit $\overline{341}$ dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}^a$ en base a .
 a) Trouver un encadrement de a^3 .
 b) Déterminer a et vérifiez.

6) Développer $(k + 1)^5$. Ecrire le nombre 13^5 dans le système de base 12.

On donne $A = \overline{114}^n$; $B = \overline{111}^n$ et $C = \overline{13054}^n$ avec, $A \times B = C$

a) Trouver n et l'écriture décimale de A, B, C .

b) Vérifier que le PGCD $(A, B) = 1$

7) On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^8$

Déterminer x tel que :

a) N soit divisible par 7

b) N soit divisible par 6.

c) En déduire la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

8) Ecrire l'entier x donné dans le système décimal en base b dans chacun des cas suivants :

a) $x = 144127$ et $b = 12$

b) $x = 177$ et $b = 2$

9) Ecrire en base dix les entiers naturels suivants : $\overline{21201}^3$ et $\overline{ABC}^{16}$

10) En utilisant la numération décimale comme intermédiaire, écrire :

a) $\overline{120212}^3$ en base 8

b) $\overline{1200}^5$ en base 2

11) Ecrire le nombre $\overline{4207}^8$ dans le système binaire :

a) En passant par le système décimal.

b) Directement.

12) Soit a, b et n trois entiers supérieurs à 3.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $n = \overline{300}^a = \overline{33}^b$.

13) Existe-t-il une base dans laquelle on a : $\overline{18} + \overline{14} = \overline{31}$? Si oui, calculer dans cette base :

$\overline{81} + \overline{41}$; $\overline{81} \times \overline{41}$; $\overline{18} \times \overline{14}$

14) a) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360.

b) En déduire dans $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation :

$$b^3(b^2 + (b + 1)^2) = 18360 \text{ d'inconnue } b.$$

c) Existe-t-il un naturel b tel que 36723 s'écrit $\overline{442003}^b$?

15) Soit x, y et z trois entiers naturels tels que : $y = \overline{131}^x$ et $z = \overline{101}^x$ avec $x > 3$.

a) Calculer le produit xyz en base x .

b) Déterminer x , sachant que : $x + y + z = 50$. Calculer alors xyz en base dix.

16) Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a) 8^{1974} par 5

b) $35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224$

18) a) En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier naturel n , on a : $10^{3n} \equiv [37]$.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37.

19) a) Déterminer pour tout entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 3.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n , le reste de la division euclidienne de $(275423)^n$ par 3.

c) Déterminer, l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(275423)^n + (372121)^n$ soit divisible par 3.

Exercice 16 :

Ecrire les nombres suivants dans les bases suivantes :

a) 68452 en base douze

b) $\overline{23245}^7$ en base neuf

c) $\overline{DAOODA}^{16}$ en base deux

d) 64206 en base seize

e) $\overline{BOOBA}^{16}$ en base huit

Exercice 17 :

1) On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{53x4}$ dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :

a) A soit divisible par 7.

b) A soit divisible par 6. En déduire que A est divisible à la fois par 6 et 7.

2) On prend $x = 2$. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs de A ?

3) Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait.

Exercice 18 :

On considère l'entier naturel représenté en base b par $A = 342x$

Déterminer le chiffre x pour que A soit :

- a) divisible par 5, quand $b = 6$
- b) divisible par 3, quand $b = 7$
- c) divisible par 12, quand $b = 17$

Exercice 19:

- 1) Déterminer suivant les valeurs de n , les restes de la division de 5^n par 7
- 2) En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{136} par 7
- 3) Un nombre s'écrit $3x53$ en base 10. Déterminer x pour que l'on ait $5136 + 3x53 \equiv 0[7]$.

Exercice 20 :

On considère l'équation $(E): (p; q) \in \mathbb{Z}^2: 11p - 7q = -4$

- 1) a) Vérifier que $(-1; -1)$ est solution de (E) ;
- b) Résoudre (E)
- 2) a) Résoudre les équations (E) et (E') suivantes :
 $(E) \ x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7] \quad \text{et} \quad (E') \ x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$
- b) Déduire de 1) et 2) les solutions du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, \quad x \in \mathbb{Z}$
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel n ; on a :
 - a) $5^{2n} - 3^n$ divisible par 11
 - b) $7^n - 1$ divisible par 6
 - c) $3^{2n} - 2^n$ divisible par 7
 - d) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17
 - e) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
 - f) $\forall n \in \mathbb{N} : A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
 - g) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{on a} : 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
 - h) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{on a} : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- 4) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :
 - a) $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.
 - b) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

c) $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11.

Exercice 21 :

On considère trois nombres entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans base n : $a = 111$; $b = 114$ et $c = 13054$

- 1) Sachant que $c = ab$, déterminer n puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal.
- 2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $ax + by = 1$.

Exercice 22 :

Un terrain a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour mesures 132m ; 156m et 204m. On veut planter des arbres sur son pourtour de façon à ce qu'il ait un arbre à chaque sommet du triangle et les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre ?

Exercice 23 :

- 1) Déterminer le PGCD (2688 ; 3024)
- 2) Dans cette question x et y sont entiers relatifs
 - a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
 $(1) : 2688x + 3024y = -3360$; $(2) : 8x + 9y = -10$
 - b) Vérifier que $(1; -2)$ est une solution particulière de (2)
 - c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2)

Exercice 24 :

- 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 45x - 28y = 1$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E') : 45x - 28y = 6$

Exercice 25 :

- 1) Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 4 des nombres 7^n et 3^n . En déduire le reste de la division euclidienne de $7^n - 3^n$ par 4.

2) Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 25x - 21$.

a) Calculer $f(7)$ et en déduire que $f(x) = (x - 7)(ax^2 + bx + c)$ où a , b et c sont trois réels à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

3) Un entier naturel N , s'écrit : $\overline{5531}$ dans le système de numération de base n et $\overline{3676}$ en base $n + 1$. Calculer n et donner l'écriture de N dans le système décimal.

Exercice 26 :

1) Un nombre s'écrit $x43y$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9

2) Un nombre s'écrit $28x75y$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et par 11

3) Un nombre s'écrit $1x1yxy$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63

Exercice 27 :

I) L'année 2012 était une année bissextile et le 1^{er} Janvier 2012 était un dimanche.

1) a) Combien de jour sépare le 1^{er} Janvier 2012 et le 20 Janvier 2012.

b) Donner la division euclidienne de 19 par 7.

c) Quel jour de la semaine était-on le 20 Janvier 2012.

2) Déterminer le jour de la semaine du 25 Mars 2012.

II) Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 175,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60 ?

III) Dans une scierie, on reçoit des arbres de deux longueurs, une première longueur de 40 dm et l'autre de 72 dm. On doit couper tous les arbres de même longueur, mais le plus long possible afin qu'il n'y ait aucune perte. Calculer la longueur de tous les arbres une fois coupés.

IV) Moussa et N'golo et Fatou prennent tous la même SOTRAMA. Moussa prend tous les deux jours, N'golo tous les trois jours et Fatou tous les cinq jours. Aujourd'hui ils se retrouvent tous ensemble dans la même SOTRAMA. Dans combien de jours se retrouveront-ils encore ensemble ?

V) Deux cyclistes Martin et Salif partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un circuit en vélo. Martin fin le tour du circuit en 42 minutes et Salif en 48 minutes.

1) Au bout de combien de temps Martin et Salif se croiseront pour la première fois (depuis le départ)

2) Déterminer le nombre de déplacement par laps de temps de Martin et Salif.

VI) Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30 m et 21 m ; les deux autres cotés mesurent 18 m et 12 m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à distance égale en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?

b) Déterminer le nombre total de poteaux utilisés pour la clôture.

VII) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangle ayant pour dimensions 525 m et 285 m. Les arbres seront régulièrement espacés de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle.

1) Calculer la distance comprise entre deux arbres.

2) Calculer le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

VII) Mariam et N'gnélé sont dans deux classes différentes. Le professeur de Mariam donne toujours des devoirs avec 30 questions, tandis que le professeur de N'Gnélé donne toujours des devoirs avec 24 questions. Même si les deux classes ont un nombre différent de devoirs, leurs professeurs leur ont dit que le nombre total de questions de devoirs par an est le même pour les deux classes. Quel est le nombre minimal de questions de devoirs que Mariam et N'Gnélé doivent s'attendre à avoir par an ?