

Série d'Exercices sur l'Arithmétique

Exercice 1 :

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} ; & b) \sum_{k=1}^n k(n-k) &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}; & c) n! &\geq 2^{n-1} \\
 d) \sum_{k=1}^n k2^{k-1} &= (n-1)2^n + 1 ; & e) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 f) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} ; & g) \sum_{k=1}^n k \times k! &= (n+1)! - 1
 \end{aligned}$$

2) Démontre que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned}
 a) n(2n+1)(7n+1) &\text{ est divisible par 2 et par 3 ; } & b) 3^{n+3} - 4^{4n+2} &\text{ est divisible par 11} \\
 c) 3^{2n+1} + 2^{n+2} &\text{ est divisible par 7 ; } & d) 2^{3n} - 1 &\text{ est un multiple de 7}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

- 1) Dans le système décimal on donne le nombre $n = (13)^4$ dans quel système de numération le nombre n s'écrit-il $\overline{14641}$?
- 2) Démontre que, quel que soit la base $b \geq 3$ le nombre qui s'écrit $\overline{1331}$ en base b est le cube d'un entier.
- 3) On considère les trois entiers naturels $A; B$ et C qui s'écrivent dans la base n :
 $A = \overline{114}, B = \overline{111}$ et $C = \overline{13054}$. Sachant que $C = AB$, détermine n puis l'écriture de chacun des nombre dans le système décimal.
- 4) L'expression d'un entier naturel n , au moyen d'une certaine base de numération b est $\overline{1254}$. On sait de même que l'expression de $2n$ dans la même base est $\overline{2541}$.
 - a) Détermine b et la valeur de n exprimée en base dix.
 - b) Détermine en base b les expressions de $3n$ et $4n$.

Exercice 3 :

Un nombre s'écrit en base cinq $\overline{xyz}$

- 1) Démontre que $\overline{xyz}$ est divisible par quatre si et seulement si $x + y + z$ est divisible par quatre.

2) Démontre que $\overline{xyz}$ est divisible par six si et seulement si $x + y + z$ est divisible par six.

Exercice 4 :

- 1) Les entiers $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$ sont écrits en base quatre ; résous le système suivant en examinant toute les possibilités pour $\alpha \in \mathbb{N}$;
$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = \alpha \\ a + b + 3 = \overline{ab} \end{cases}$$
- 2) Les entiers a et b prenant les valeurs trouvées en 1) écris en base dix puis en base deux chacun l'entier naturel $\overline{3a3b}^4$.

Exercice 5 :

- 1) Montre que pour tout réel x : $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$. Mets le polynôme P tel que $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$ sous forme d'un produit de facteur du second degré.
- 2) Dédure de ce qui précède que, si la base du système de numération est égale à 5 le nombre $\overline{10304}$ est divisible par $\overline{112}$. La base étant 7, exprime le quotient de division de $\overline{10304}$ par $\overline{112}$.

Exercice 6 :

Détermine les chiffres x et y du nombre dont l'écriture décimale est $\overline{28x75y}$ pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 11.

Exercice 7 :

- 1) Pour tout entier naturel n , calcule le reste de la division euclidienne par 7 de 5^n et de 4^n .
- 2) Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7.
- 3) Montre que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $S = 3^{n+5} - 3^n$ est divisible par 11.
- 4) Montre que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.
- 5) Pour quelles valeurs de l'entier n , $n^4 - 1$ est-il divisible par 5.

Exercice 8 :

1) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations d'inconnue x suivantes :

a) $4x = \dot{3}$

b) $x^2 + 2x + \dot{4} = \dot{0}$

c) $x^3 + x^2 + 2x + \dot{3} = \dot{0}$

2) Résous dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $3x - \dot{2} = \dot{0}$

3) Résous dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système :
$$\begin{cases} 2x + 3y = \dot{2} \\ x + 2y = \dot{4} \end{cases}$$

4) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 1[5]$ et l'équation $5x \equiv 2[7]$ et le système :
$$\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$$

5) Démontre que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8. Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $8x + 1 = y^2$.

Exercice 9 :

- 1) On considère l'équation (E) d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $6x - 10y = a$ où a désigne un nombre entier relatif. A quelle condition l'équation (E) admet-elle des solutions ? Résous (E) lorsque $a = 22$.

- 2) Soit l'équation (E) : $109x - 206y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs. Détermine le PGCD(109, 206) en utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduis une solution particulière de (E).

Détermine l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 10 :

Trouve l'ensemble des diviseurs du nombre 276. Trouve tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que : $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$ où $m = \text{PPCM}(a, b)$ et $d = \text{PGCD}(a, b)$

Exercice 11 :

- 1) Trouve les entiers naturels a et b dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} ab = 3240 \\ a \vee b = 360 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + b = 252 \\ a \vee b = 735 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a \wedge b = 6 \\ a \vee b = 420 \end{cases}$

- 2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$: $90(x - 3) = 36(2 - y)$. En déduis l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et satisfaisant à $90(x - 3) = 36(2 - y)$ et $xy \geq -15$.

Exercice 12 :

- 1) Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.
- 2) Détermine l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2[15]$.
- 3) Résous dans $\mathbb{Z}^2$: $21590x + 9525y = 1270$
- 4) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

Exercice 13 :

- 1) Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16, il reste 3 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 25, il reste 5 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats, combien y-a-t-il de soldats ?
- 2) Une colonie de vacances compte 57 participants : les filles et les garçons s'y affrontent au cours d'une course d'orientation. L'équipe vainqueur recevra des friandises à partager entre tous ses membres. Pour qu'un tel partage puisse avoir lieu que les vainqueurs soient les filles ou les garçons, il a fallu prévoir 252 friandises. Combien y-a-t-il de filles et de garçons dans cette colonie de vacances ?
- 3) Deux commerçantes Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs. L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base 8 et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base 7.
 - a) Détermine les chiffres x et y pour que chacune des deux commençantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
 - b) Détermine le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.