

Exercices : Arithmétiques TSE

Exercice 1 :

- 1) La somme de 2 entiers a et b avec ($a > b$) est 444. La division euclidienne de a par b admet 4 pour quotient et 24 pour reste. Détermine les entiers a et b .
- 2) Soit 2 entiers naturels a et b avec ($a > b$) La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Détermine a et b .
- 3) Quel peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?
- 4) La division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b donne pour reste r d'autre part ($a + 15$) divisé par ($b + 5$) donne pour quotient q et pour reste r . Détermine q .
- 5) La division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b donne pour quotient $q = 356$ et pour reste $r = 4623$. Détermine n pour que ($a + n$) divisé par ($b + n$) donne pour quotient $q = 356$.
- 6) Trouve les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calcule l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Exercice 2 :

- 1°) Montre que $4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$
- 2°) Dédus-en que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à 5 le nombre $\overline{40301}$ est divisible par $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b).
- 3°) Que vaut le quotient de la division de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$ quand $b = 9$?
- 4°) n et p sont deux entiers naturels. Le reste de la division euclidienne de n par 13 vaut 9 et que le reste de la division euclidienne de p par 13 vaut 8. Quel est le reste de la division euclidienne de $n + p$ par 13 ?

Exercice 3 :

Dans le système de numération de base 3, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^3$.

- 1°) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^n$?
- 2°) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$?

Exercice 4 :

- 1) Effectue les opérations suivantes : $\overline{1011}^2 + \overline{110}^2$; $\overline{FACE}^{16} - \overline{BEC}^{16}$; $\overline{3421}^5 + \overline{240}^5$; $\overline{321}^8 \times \overline{230}^8$; $\overline{BAC}^{16} - \overline{DEF}^{16}$.
- 2) Les entiers naturels $\overline{34}$; $\overline{13}$; $\overline{1102}$ sont écrits dans la base a , a étant un entier naturel supérieur ou égale à 5. Trouve a sachant que : $\overline{34} \times \overline{13} = \overline{1102}$

Exercice 5 :

- 1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n-1}$ est-il un entier relatif ?
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?
- 3) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n+17}{n-1}$ est-il un entier relatif ?
- 4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{n+16}{n-2}$ est-il un entier naturel ?
- 5) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il un entier naturel ?

Exercice 6 :

- 1) Détermine dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b .
a) $a = 3453$ et $b = 13$; **b)** $a = -145$ et $b = 22$; **c)** $a = 11111$ et $b = 333$;
d) $a = -994567$ et $b = 3432$; **e)** $a = 15141$ et $b = 143$; **f)** $a = -396562$ et $b = 4478$
- 2) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de :

a) 11^n par 7 ; b) 4^n par 7 ; c) 5^n par 11 ; d) 3^n par 11 ; e) 3^n par 7 ;

f) $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7.

3) Détermine le reste de la division euclidienne de :

a) 200^{539} par 17 ; b) 2^{437} par 7 ; c) $7^{2002} + 2$ par 9 ; d) 11^{1999} par 7 ; e) 2^{456} par 5 ;

f) 32064512 par 9 ; g) 2103211^4 par 7.

Exercice 7 :

Démontre par récurrence que :

1.1) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

1.2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_1^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

1.3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_1^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

1.4) $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

1.5) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_1^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1.6) $\forall n \geq 5 : 2^n > 5(n+1)$

b) Démontre que pour tout entier naturel n , on a :

2.1) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2.2) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

2.3) $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

2.4) $n^7 - n$ est divisible par 7.

2.5) $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.

Exercice 8 :

1) Détermine suivants les valeurs de l'entier naturel n , les restes de la division euclidienne de : 5^n par 11 ; 2^n par 5 ; 6^n par 11.

2) Détermine le reste de la division euclidienne de : 2^{2023} par 5 ; $7^{2002} + 2$ par 9 ; 11^{1999} par 7.

3) Résous dans $\mathbb{Z}$, les équations suivantes : $(E_1) : 14x + 21y = 7$;

$(E_2) : 5p + 3q = 7$; $(E_3) : 4u - 8v = 3$; $(E_4) : 11u - 7v = -4$;

$(E_5) : 7x - 21y = 4$; $(E_6) : 34p - 15 = 2$; $(E_7) : 5x + 3y = 7$;

$(E_8) : 11x - 26y = 1$; $(E_9) : 4u - 6v = 6$.

4) On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?

Exercice 9 :

1) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $3x^2 - x + 4 = 0$

2) Résous dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 - 6x + 5 = 0$

3) Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 + x + 6 = 0$

4) Résous dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 + x + 6 = 0$

5) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $x^2 + 2x + 6 = 0$

Exercice 10 :

1) Soit l'entier naturel $N = 1323$.

a) Décompose en produit de facteurs premiers.

b) Détermine le nombre de diviseurs de N et trouve tous les diviseurs de N .

c) Ecris N dans le système de numération de base 2 et 3.

2) Détermine entier naturel n pour que $A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.

Exercice 11 :

1) Résous dans $\mathbb{Z}$, les équations et systèmes suivants :

- a) $5x \equiv 1[6]; 15x \equiv 25[35]; 424 + 161x \equiv 1[6]; x^2 + 2x \equiv 6[9]$
 b) $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}): 2x + 1 = 0; \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}; \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}; \begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$
 c) $x \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}): x^2 - 6x + 5 = 0; x \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}): \begin{cases} 2x - 4 = 2 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$
- 2) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans la base dix. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.
- 3) Soient a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \equiv 4[5]$ et $b \equiv 3[5]$. Détermine le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.
- 4) Un nombre s'écrit $\overline{724x5}$ dans le système décimal. Détermine x pour qu'il soit divisible par 9.
- 5) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Détermine x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.
- 6) Détermine les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 28$.

Exercice 12 :

Dans chacun des cas suivants, vérifie si les nombres a et b sont premiers entre eux :

- a)** $a = 122$ et $b = 32$; **b)** $a = 85631$ et $b = 111$; **c)** $a = 712379$ et $b = 1551$;
d) $a = 96777$ et $b = 5777$; **e)** $a = 101230$ et $b = 1200$;
f) $a = 9975462199$ et $b = 324411220$;

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, détermine le PGCD et le PPCM des réels :

- a)** $a = 24$ et $b = 33$; **b)** $a = 48$ et $b = 46$; **c)** $a = 1455$ et $b = 335$;
d) $a = 114$ et $b = 22$; **e)** $a = 999$ et $b = 18$; **f)** $a = 14422$ et $b = 332$;
g) $a = 1655$ et $b = 77$; **h)** $a = 42137$ et $b = 41$.

Exercice 14 : On donne $A = \overline{114}^n$; $B = \overline{111}^n$; $C = \overline{13054}^n$ et $A \times B = C$.

- Trouve n et l'écriture décimale de A ; B ; C .
- Vérifie que le PGCD (A, B) = 1. Que peux-tu dire de A et B .

Exercice 15 :

1) Résous dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ PGCD(x; y) = 12 \end{cases}; \begin{cases} PGCD(x; y) = 27 \\ PPCM(x; y) = 108 \end{cases}; \begin{cases} x \cdot y = 14196 \\ PGCD(x; y) = 13 \end{cases}; \begin{cases} x \cdot y = 1008 \\ PPCM(x; y) = 168 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ PPCM(x; y) = 105 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 651 \\ \frac{x \vee y}{x \wedge y} = 108 \end{cases}; \begin{cases} x \vee y = 120 \\ x^2 + y^2 = 801 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 96 \\ PGCD(x; y) = 4 \end{cases};$$

$$(x \wedge y) + (x \vee y) = y + 9; 3(x \wedge y) + 2(x \vee y) = 78.$$

2) Détermine l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que :

$PPCM(a; b) = m$; $PGCD(a; b) = d$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases}; \begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}; 2m + 3d = 11; m^2 - 3d^2 = 1998.$$

Exercice 16 :

Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on considère les nombres suivants :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4.$$

- Montre que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
- On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .
 - Etablis une relation entre α et β indépendant de n .
 - Démontre que d est un diviseur de 5.
 - Démontre que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est un multiple de 5.
- Montre que $2n + 1$ et n sont deux nombres étrangers.

- 4) a) Détermine suivant les valeurs de n et en fonction de n , le $PGCD$ de a et b .
 b) Vérifie les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 17 :

- 1) Un général décide de compter son troupe de soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16 il reste 3 soldats, il leur ordonne de se ranger en rang de 25, il reste 5 soldats sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats combien y'a-t-il de soldats ?
 2) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation d'inconnues $(p; q)$: $11p - 7q = 1$.
 3) a) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera le reste dans la division par 77 ?
 b) Détermine les valeurs de l'entier naturel n inférieurs à 200.

Exercice 18 :

N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a^4}$ et M s'écrit $\overline{bca35^7}$.

- 1°) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 6^n par 11.
 2°) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x + y = 46$.
 3°) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple $(b; c)$ est solution de $7x + y = 46$. Donne les écritures en base 4 de N et en base 7 de M .
 4°) Détermine l'entier naturel n tel que $M^n \equiv 3[5]$.
 5°) a) Ecris dans le système décimal les nombres N et M .
 b) Résous dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b :
$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 5N + 14 \\ PPCM(a; b) = M - N \end{cases}$$

Exercice 19 :

- I. On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}$ dans le système de numération de base 8. (*Devoir 2023*)
 1) Détermine x de telle sorte que : N soit divisible par 7 et qu'il soit divisible par 6. Déduis-en qu'il existe x tel que N soit divisible à la fois par 6 et par 7.
 2) On prendra $x = 2$. Détermine l'écriture décimale de N . Quel est le nombre de diviseur de N dans $\mathbb{N}$?
 II. On note n un entier non nul, p l'entier naturel $3n + 1$ et q l'entier naturel $5n - 1$.
 1°) Démontre que le $PGCD$ de p et q est diviseur de 8.
 2°) Pour quelles valeurs de n , ce $PGCD$ est-il égal à 8 ? Calcule alors le $PPCM$ de p et q .

Exercice 20 :

- 1) Trouve trois entiers naturels $a; b; c$ différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que : $a \times b \times c = 495$.
 2) $x; y; z$ étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix. Détermine tous les triplets $(x; y; z)$ pour lesquelles A est divisible par 495.

Exercice 21 : Soit le système (S) :
$$\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

- 1°) Détermine le couple d'entiers $(\alpha; \beta)$ solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.
 2°) En déduis un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation ci-dessus puis résous complètement l'équation : $23u - 7v = -6$
 3°) Démontre que x est solution de (S) si et seulement si il existe $(u; v)$ couple d'entiers vérifiant :
$$\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$$
. En déduis l'ensemble des solutions de (S) .
 4°) Détermine la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16.

Exercice 22 :

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_1) : $11x + 8y = 79$.
 a) Montre que si $(x; y)$ est solution de (E_1) Alors $y \equiv 3[11]$.
 b) Résous alors l'équation (E_1) .

2) Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de $48000F$.

⇒ Le prix d'une pièce du premier lot est de $4800F$.

⇒ Le prix d'une pièce du deuxième lot est de $3600F$.

⇒ Le prix d'une pièce du troisième lot est de $400F$.

Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 23 :

1°) a) Montre en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs tels que :
 $324u + 245v = 1$.

b) En déduis de ce qui précède une solution particulière $(x_0; y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E): $324u - 245v = 7$ et résous dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

2°) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ où n est un entier naturel strictement supérieure à 2.

a) Montre que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelles valeurs de n , $A(n)$ est-il un entier naturel ?

c) Pour quelles valeurs de n , $A(n)$ est-il irréductible ?

3°) Détermine l'entier naturel n tel que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par 11.

4°) Trouve les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que : $2m - d = 220$ où $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.

Exercice 24 :

1°) Détermine tous les entiers naturels a et b ($a < b$) tels que :

$$m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b \text{ vérifient } \begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$$

2°) Effectue la division euclidienne de a par b pour $a = -532$ et $b = -71$.

3°) Effectue les opérations suivantes : $\overline{FACE}^{16} - \overline{BEC}^{16}; \overline{3421}^{15} - \overline{230}^{15}$

4°) A l'occasion d'une fête, le gouvernement a renoncé à certaines taxes sur le bétail. Un marchand d'oviné, ayant bénéficié de la subvention, a vendu tous ses animaux (des moutons et des chèvres) faisant ainsi une recette de 1000000 CFA . Chaque mouton coûtait 80000 CFA tandis que la chèvre faisait 50000 CFA . Sachant que le marchand avait plus de chèvres que de moutons, détermine le nombre de moutons et le nombre de chèvres qu'avait vendu ce marchand. **Bac 2023**

Exercice 25 :

I. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Détermine, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n .

En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

2) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$. Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

3) Soit l'équation (E): $21590 + 9525y = 1270$.

a. Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.

b. Détermine l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2[15]$.

c. Résous l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $21590x + 9525y = 1270$.

d. Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

II. On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept. **Bac 2008**

1°) Détermine x pour que :

a) A soit divisible par six.

b) A soit divisible par cinq.

c) En déduis qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2°) On donne à x la valeur zéro, détermine l'écriture décimale de A . Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

Exercice 26 : Bac 2001

- 1) Le système de numération est un système décimal.
 - a) Détermine l'entier naturel $N = PGCD(17787; 689; 297)$
 - b) Résous l'équation : $13x - 84y = 7$
- 2) a) Détermine tous les couples $(a; b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} a \times b = \dot{0} \\ a - b = \dot{5} \end{cases}$
- b) Résous dans $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 3x - 4 = \dot{0}$
- c) Démontre que quel que soit l'entier naturel n , on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

3) **Bac 2002**

Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $30m$ et $21m$; les deux autres côtés mesurent $18m$ et $12m$. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

- a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?
- b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.
- 4) a) Décompose les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers.
- b) Quel est le $PGCD$ de 450 et de 320 ?
- c) Une pièce rectangulaire a pour dimension $4,5m$ et $3,2m$. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ? **Bac 2006**

Exercice 27 : Bac 2011

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{u}; \vec{v})$ on donne le point $A(12; 18)$. On désigne par un B point de l'axe $(0; \vec{u})$ et un C point de l'axe $(0; \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle l'abscisse x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C .

- 1) Démontre que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation $(E): 2x + 3y = 78$.
- 2) On se propose de trouver tous les couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
 - a) Montre que l'on est ramené à l'équation (E) , avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
 - b) A partir de la définition de B et C trouve une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E)
 - c) Démontre qu'un couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x; y) = (12 + 3k; 18 - 2k)$ où k est un entier relatif.
 - d) Combien y'a-t-il de couples de points $(B; C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Exercice 28 : Bac 2018

On considère l'équation $(E): 8x + 5y = 1$ où $(x; y)$ est un couple entiers relatifs.

- 1) a) Donne une solution particulière de l'équation (E) .
- b) Résous l'équation
- 2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
 - a) Montre que le couple $(a; -b)$ est solution de (E) .
 - b) Quel est le reste, de la division de N par 40 ?
- 3) a) Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupes ?

Exercice 29 : Bac 2020

1. Démontre que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 2$ est un multiple de 7. En déduis que , $2^{3n+1} - 1$ et , $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
 - a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
 - b. Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
 - c. Étudie le cas où $p = 3n + 2$.

Exercice 30 : Bac 2021

- A. On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.
Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x + 1$.
 - 1) Ecris N et N' dans le système de base x .
 - 2) Ecris $N + N'$ dans le système de base $x + 1$. Déduis-en que $N + N'$ est un multiple de $x + 1$.
 - 3) Donne, dans le système de base x le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x + 1$.
 - 4) Montre qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$
- B. Détermine tous les couples $(\alpha; \beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant : $PGCD(\alpha; \beta) + PPCM(\alpha; \beta) = \beta + 9$

Exercice 31 : Bac 2022

- 1) Démontre que pour tout entier naturel n , $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.
- 2) Détermine le chiffre des unités du nombre 17^{97} écrit dans le système décimal.
- 3) Détermine les entiers naturels a et b ($a < b$) tels que : $\begin{cases} a \times b = 1734 \\ a \wedge b = 17 \end{cases}$
- 4) a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $17x - 13y = 4$.
b) La division euclidienne d'un entier naturel N par 13 donne pour reste 5. Le même entier divisé par 17 donne pour reste 1. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 221 ?

Exercice 32 :

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

- 1°) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4,5m$ et de largeur $3,75m$.

On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33cm$ de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure ci-contre.
Calcule le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.



- 2°) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4,55m$ et de largeur $3,85m$. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
 - a) Donne la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
 - b) Donne la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
 - c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?
- 3°) On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24cm$ et de largeur $15cm$.
 - a) Donne la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

- b) Donne la liste des multiples communs à 24 et 15 inférieurs à 400.
 c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpée ?

Exercice 33 : RCI 2019 série C

- 1) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $(E): 5y + 8x = 1$.
 2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ de nombres entiers vérifiant $N = 1 + 8a$ et $N = 2 + 5b$.
 a) Prouver que le couple $(a; -b)$ est solution de (E) .
 b) Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 40.
 3) a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $5y + 8x = 100$.
 b) A l'occasion de la fête de tabaski, un marchand de bétail a vendu tous ses taurillons et tous ses béliers faisant ainsi une recette de 1 000 000 F au total. Sur le marché, un taurillon coûtait 80 000 F et un bélier faisait 50 000 F . Sachant que le marchand avait plus de béliers que de taurillons, on demande de trouver le nombre de taurillons et celui de béliers qu'avait ce marchand pour le marché.

Exercice 34 : RCI 2019 série C

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$

Partie A :

- 1) Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.
 2) On suppose que : $m \equiv 0[27]$.
 i. Démontre que : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$
 ii. Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$
 iii. Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B :

Dans cette partie on suppose que : $a > c$. On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.

- 1) Justifie que : $d = 99u$.
 2) Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.
 3) On suppose que : $b = a + c$.
 i Justifie que : $m = 11(10a + c)$.
 ii Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.
 4) On suppose que : $a = b + c$.
 i. Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.
 ii. Justifie que : $m = 110b + 101c$.
 iii. Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$; $c \neq 0$; $b + c$ n'est pas divisible par 3; b et c sont premiers entre eux.
 iv. Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d .

Exercice 35 : RCI 2021 série C

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux nombres entiers X et Y tels que : $X = k^2 - 2k + 2$ et $Y = k^2 + 2k + 2$. On pose : $PGCD(X; Y) = m$.

- 1) Démontre que tout diviseur de X qui divise k , divise 2 .
 2) Démontre que tout diviseur commun de X et de Y divise $4k$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que k est impair.

- 3) a) Justifie que les nombres entiers X et Y sont aussi impairs.
 b) Déduis-en que m est impair.
 4) a) Justifie que m divise 2 .
 b) Déduis des questions précédentes que : $PGCD(X; Y) = 1$.