

Exercice d'arithmétique TSE. Fiche N°2

Exercice 46

- 1) On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.
 - a) Énonce un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
 - b) Détermine une solution particulière de (E) et en déduis une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
 - c) Résous (E').
- 2) Montre que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
- 3) On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$.
 - a) Détermine les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation (E'').
 - b) Montre que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Détermine-le.

Exercice 50

Dans un système de numération de base a , on considère les nombres : $A = 211$; $B = 312$ et $C = 133032$.

- 1) Explique pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
- 2) a) Sachant que $C = A \times B$; montre que : $a^2 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduis que a divise 8.
b) Détermine alors a .
- 3) L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrit ce nombre en base 4
- 4) Dans cette question, on suppose que $a = 4$.
 - a) Ecris A, B et C dans le système décimal
 - b) Montre alors que : $C = A \times B = \text{PPCM}(A; B)$.
En déduis que l'équation $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
- 5) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.
Vérifie que $(19; -13)$ est une solution de l'équation. Résous cette équation.

Exercice 59

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n .

Par exemple $\mathcal{D}_{10} \cap \mathbb{N} = \{1; 2; 5; 10\}$ donc $S(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

- 1) Calcule $S(n)$ pour les valeurs suivantes : 4; 5; 17 et 21.
- 2) a) Pour p entier naturel premier, prouve que $S(p) = p + 1$.
b) Démontre par récurrence sur α que si p est un entier naturel premier alors : $S(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$; $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
On remarquera que : $S(p^{\alpha+1}) = S(p^\alpha) + p^{\alpha+1}$.
- 3) En déduis : $S(2^5)$; $S(2187)$ et $S(343)$.

Exercice 62

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montre par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduis que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
- 2) Montre par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduis que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
- 3) Montre que :
 - a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
 - b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils sont premiers entre eux.
- 4) a) Montre par récurrence que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
b) En déduis que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n .

Exercice 49

N et M sont deux nombres tels que : $N = \overline{1a3a^4}$ et $M = \overline{bca35^7}$.

- 1) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n les reste de la division de 6^n par 11.
- 2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x + y = 46$.
- 3) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple $(b ; c)$ est solution de $7x + y = 46$.
Donne les écritures en base 4 de N et en base de 7 de M.
- 4) Détermine l'entier naturel n tel que $M^n \equiv 3[5]$.
- 5) a) Ecris dans le système décimal N et M.
b) Résous dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnue a et b :
$$\begin{cases} \text{PPCM}(a ; b) = M - N \\ \text{PGCD}(a ; b) = 5N + 14 \end{cases}$$

+++++Exercice 65 :+++++

On considère les nombres A et B tels que :

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \text{ et } B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$$

- 1) Vérifier que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$
- 2) Démontrer : $\blacksquare \forall n \in \mathbb{N}, A \text{ est divisible par } 111$
 $\blacksquare \text{ Si } n \text{ est impair, alors } A \text{ est divisible par } 7 \text{ et par } 13$
- 3) a) Si n est impair, démontrer que B est divisible par 7 ; 11 et 13
b) Si n est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7 ; 11 ; 13 et 111

Exercice 40

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

- 1) On considère l'équation (E) : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.
 - a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Démonstre que $2x \equiv 1[7]$.
 - b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 1[7]$.
 - c) En déduis que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k ; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.
- 2) Résous l'équation (E') : $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.
- 3) L'AMAD est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes.
Les cotisations sont de 900 F CFA pour les hommes et de 700 F CFA pour les femmes.
Pour sa fête annuelle, le parrain de l'AMAD désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes.
Malheureusement, il ne connaît pas le nombre d'hommes et de femmes de cette association.
Cependant sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 20000 F CFA.
Détermine le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

Exercice 19

On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

- 1) La distance comprise entre deux arbres.
- 2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.