

Arithmétique - Problèmes

Exercice 1**APROMATHS 2018**

Détermine le nom d'un oiseau sachant que ce nom est composé de 5 lettres, et que si l'on attribue à chacune d'elles une valeur numérique égale au rang qu'elle occupe dans l'alphabet, on trouve que :

- ✗ La somme des deux premières est égale à 17 ;
- ✗ La somme de la troisième et de la quatrième est égale à 17 ;
- ✗ L'excès de la somme des deux dernières sur la somme des trois premières est égal à 17 ;
- ✗ Le produit de la seconde par son complément à 17 est égal au $\frac{12}{5}$ du produit de la troisième par son complément à 17.

Exercice 2**APROMATHS 2018**

1. Effectue les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$(1-x)^3 = x^3 q_1(x) + r_1(x) \text{ puis } x^3 = r_1(x) \times q_2(x) + r_2(x) \text{ et } r_1(x) = r_2(x) \times q_3(x) + r_3(x).$$

2. En déduis qu'il existe deux fonctions polynômes U et V telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1-x)^3 \times U(x) + x^3 \times V(x) = 1.$$

3. En te servant du résultat précédent, détermine une solution particulière des équations suivantes puis les résoudre.

a) $\forall (p, t) \in \mathbb{Z}^2, -p + 8t = 1$

b) $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, 64m - 27n = 1.$

Exercice 3**APROMATHS 2017**

Nous étions dimanche 1^{er} janvier 2016, la direction d'une école décide d'organiser, un devoir en mathématiques tous les 30 jours et un devoir en physique tous les 20 jours dans les classes de terminales sciences.

Quel jour de la semaine sera la date où les devoirs se coïncident (À compter du 1^{er} janvier 2017) ?

Exercice 4**APROMATHS 2016**

1. M. Coulibaly et M. Diarra veulent acheter des bananes vendues à cinq francs l'unité. M. Coulibaly possède n francs avec $n = \overline{1x00y2}^8$ et M. Diarra possède m francs avec $m = \overline{x1y003}^7$.

L'argent que chacun possède lui permet d'acheter un nombre entier de bananes.

- a) Déterminer les chiffres x et y .
 - b) Écrire les entiers n et m en base 2.
 - c) Déterminer le PGCD et le PPCM de n et de m .
 - d) Calculer le nombre de bananes que pourrait acheter chacun.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation d'inconnues $(x; y)$ suivante : $3x - 7y = 23$.

Exercice 5

APROMATHS 2015

Trois frères se partagent un terrain rectangulaire de 14 hectares de superficie, de façons suivantes :

- ✗ le premier en prend la moitié ;
- ✗ le second prend la moitié de ce qui reste ;
- ✗ le troisième prend la moitié de ce qui reste, et le partage continue ainsi.

Le terrain sera-t-il totalement partagé si on continue indéfiniment cette méthode ?

Si oui, quelle sera la part de chaque frère ?

Exercice 6

Pour son anniversaire, Seydou a reçu des timbres.

- ✗ Il y en avait moins de 200.
- ✗ Si on les répartit en tas de 2, il n'en reste pas.
- ✗ Si on les répartit en tas de 8, il n'en reste toujours pas.
- ✗ Si on les répartit en tas de 14, il n'en reste pas, non plus.
- ✗ Mais si on les répartit en tas de 5, il en reste 3.

Combien de timbres Seydou a-t-il reçus pour son anniversaire ?

Exercice 7

Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large, à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera planté à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être un nombre entier de mètres.

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
2. Déterminer, dans chaque cas, le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

Exercice 8

Je suis un nombre à trois chiffres qui possède exactement trois diviseurs. La somme de mes chiffres est de treize. **Qui suis-je ?**

Exercice 9

Quel est le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs ?

Exercice 10

Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.

1. Quel est le dernier nombre atteint ?
2. Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris) ?

Exercice 11

Dans une UE de maths à l'université Claude Bernard, il y a entre 500 et 1000 inscrits. L'administration de l'université a remarqué qu'en les répartissant en groupes de 18, ou bien en groupes de 20, ou bien aussi en groupes de 24, il restait toujours 9 étudiants. **Quel est le nombre d'inscrits ?**

Exercice 12

Le 1^{er} janvier 2007 était un lundi. Calculer quel jour de la semaine sera le :

1. 2 juillet 2007
2. 15 janvier 2008
3. 19 mars 2008 (attention, 2008 est une année bissextile)
4. 14 juillet 2010
5. 26 août 2011.

Exercice 13

L'entier n a 6 chiffres et s'écrit $n = \overline{x1527y}$. On sait que n est un multiple de 4 et que si on le divise par 11, le reste est égal à 5. **Trouver n .**

Exercice 14

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 . Montrer que le couple $(u; v)$ est solution de l'équation : $35x - 27y = 2$ (E_1).
2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de l'équation : $35x - 27y = 1$ (E_2).
b. En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de (E_1).
c. Déterminer toutes les solutions de (E_1).
d. Déterminer la solution $(u; v)$ permettant de déterminer J_1 .
3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
b. Le jour J_0 était le 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (l'année 2000 était bissextile).
c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jour devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 15

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

1. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.
2. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lots ?

Exercice 16

1. Calculer le PGCD de 110 et de 88.
2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :

« Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. » Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

3. Combien obtiendra-t-on de carrés par plaque ?

Exercice 17

Un marchand vient de recevoir 1240 bonbons et 320 chocolats.

Il souhaite faire le plus grand nombre de paquets identiques en utilisant tous les bonbons et tous les chocolats. Combien de paquets pourra-t-il faire ?

Exercice 18

On dispose d'une plaque rectangulaire dont les dimensions sont 735 mm sur 504 mm

On veut découper dans cette plaque des carrés de côté x mm ($x \in \mathbb{N}$), sans qu'il y ait de perte de matière.

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on peut réaliser un tel découpage.
2. Quelle est la valeur maximale de x et quel est dans ce cas le nombre de carrés découpés.

Exercice 19

Montre que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

Exercice 20

Quel est le chiffre des unités de 2007^{2007} ?

Exercice 21

Montre que pour tout entier $p > 3$, on a $p^2 \equiv 1[24]$.

Exercice 22

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1. Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2. Préciser le nombre de déplacement par laps de temps.

Exercice 23

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

Exercice 24

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

Exercice 25

Démontre que le produit de quatre nombres entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.

En déduire quatre entiers consécutifs dont le produit est 5040.

Exercice 26

Détermine rapidement le dernier chiffre de 2005^{10} .

Exercice 27

Montre (au moyen des congruences) que, si aucun des trois entiers a , b ou c n'est multiple de 3, alors $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0[3]$.

Exercice 28

Quatre nombres entiers strictement positifs a , b , c et d forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre premier avec a .

Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation : $10a^2 = d - b$.

Exercice 29

Trouve tous les entiers $n \geq 1$ tels que $\frac{n^3 + 3}{n^2 + 7}$ soit un entier.

« Pour bâtir haut, il faut creuser profond »