

Exercice 1 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

- $\sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k \cdot (-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{k=1}^n k \cdot 5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

Exercice 2 : Démontrer que $\forall n \geq 5$ on a : $2^n \geq n^2$.

Exercice 3 : Trouver les entiers qui divisé par 5 donne un quotient égal à 3 fois le reste.

Exercice 4 : Lorsqu'on divise a par b , le reste est 8 et lors qu'on divise $2a$ par b ; le reste est 5. Déterminer le diviseur b .

Exercice 5 : Démontrer que pour tout entier naturel n , 11 divise $2^{6n+1} + 3^{2n+1}$.

Exercice 6 : 1-) Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

2-) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 3 du carré d'un entier ?

3-) En déduire que pour tout entier naturel n , le nombre $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3.

Exercice 7 : Soit $n = 294$

1-) Ecrire la décomposition en produit de facteur premier de n .

2-a) Combien n possède-t-il de diviseurs positifs ?

b) En déduire la liste des diviseurs de n .

Exercice 8 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 9 : Dans une division euclidienne le dividende est augmenté de 36, et le diviseur de 3, le quotient et le reste se trouvent inchangés. Déterminer le quotient.

Exercice 10 : Déterminer tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 20 donne un reste égal au carré du quotient.

Exercice 11 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 12 : 1-) ON divise 667 par un entier naturel non nul b , le quotient est 18 et le reste r . Déterminer b et r .

2-) On divise 327 par un entier naturel n , le reste est 17. Déterminer n .

Exercice 13 : 1-) Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 56.

2-) Déterminer la liste des diviseurs positifs de 56.

3-) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $x^2 - y^2 = 56$

Exercice 14 : Démontrer quelque soit n de $\mathbb{N}$ $u_n = n \cdot 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^n + 1$.

Exercice 15 : Dans la division euclidienne de N par 11, le reste est 9 et quotient est q .

Dans la division euclidienne de N par 12, le reste est r et le quotient est $q - 1$

Déterminer les valeurs de N possibles.

Exercice 16 : Démontrer que 29461905 est divisible par 495 (sans faire la division).

Exercice 17 : Démontrer que n^2 divise $a = (n + 1)^n - 1$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 18 : Montrer que $N=1001001001001$ est divisible par $n=11111$

Exercice 19 : 1-) Déterminer suivant les valeurs de l'entier n , le reste de la division par 7 de 5^n .

2-) En déduire le reste de la division par 7 de 5^{136} .

3-) Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10

Déterminer x pour que l'on ait $5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0[7]$

Exercice 20 : 1-) Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2-) Justifier que $1999 \equiv 4[7]$.

3-) En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132} .

4-) Soit l'entier A_k tel que : $A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$

Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k , le reste de la division euclidienne de A_k par 7.

Exercice 21 : 1-) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2-) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ par 7 (on pourra remarquer $851 \equiv 4[7]$).

3-) On considère le nombre B qui s'écrit $(2103211)_4$

Déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 7.

Exercice 22 : 1-) Déterminer en quelle base x , on a l'égalité suivante :

$$\overline{324} + \overline{256} = \overline{613}$$

2-) Dans la base x , donner les tables d'addition et de multiplication, puis effectuer directement l'opération $\overline{324} \times \overline{256}$

3-) Ecrire en base 2, le nombre $\overline{256}$ écrit en base x .

Exercice 23 : Dans un système de numération de base inconnue deux nombres s'écrivent 302 et 402.

Dans le système à base 9, le produit de ces deux nombres s'écrit 75 583. Quelle est la base du premier système ?

Exercice 24 : Déterminer les entiers naturels n pour lesquels on a :

a) $n + 9 \equiv 0[n - 1]$

b) $3n + 27 \equiv 0[n - 1]$

c) $n(n^2 - 49)(n^2 + 49) \equiv 0[30]$

Exercice 25 : On sait que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 3$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$

1. Quel est le reste de la division de A par 111 ?

2. On suppose x impair. Montrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13.

3. On suppose n pair :

a) Montrer que $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.

b) Quel est le reste de la division de A par 111×1001 .

Exercice 26 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$

En déduire que dans un système de numération dont la base est au moins égale à 5, le nombre $\overline{10304}$ est divisible par $\overline{112}$.

Exercice 27 : Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + x^3 + x + 1 \equiv (x - 2)^4 [3]$.

En déduire x tels que $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 [3]$.

Exercice 28 : 1-) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 5^n par 13.

2-) Démontrer que : $x^4 + x^3 + x = x(x + 1)(x^2 + 1)$.

3-) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $x^4 + x^3 + x \equiv 0 [13]$ (On donnera les solutions sous forme $x \equiv a [13]$)

4-) Déduire de ce qui précède, l'ensemble des entiers naturels n pour les quels on a : $5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 [13]$.

Exercice 29 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

2. Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}$ dans le système de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

a. Démontrer que $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0 [7]$.

b. En déduire l'ensemble E des valeurs de b .

Exercice 30 : 1-) Etudier les restes de la division par 7 des nombres 2^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2-) On pose $u_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$. Montrer que l'on a : ($n \in \mathbb{N}$) $u_{n+3} \equiv u_n [7]$.

3-) Trouver les entiers naturels n tels que $u_n \equiv 0 [7]$.

4-) Les nombres écrits en base deux : $\overline{1110}$; $\overline{1010100}$; $\overline{100100100}$ sont-ils divisible par 7 ?

Exercice 31 : 1-) Vérifier que pour tout

$x \in \mathbb{R} \quad x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$

2-) En déduire que dans tout système de mesure dont la base $n > 3$ on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$.

3-) Ecrire en base x ($x > 3$) le carré $\overline{11}$ et le cube de $\overline{11}$.

4-) Quels sont les diviseurs du nombre $B = \overline{1320}$ dans n'importe quelle base x ($x > 3$).

Exercice 32 : Trouver l'ensemble des nombres s'écrivant $\overline{cd\bar{u}}$ dans le système décimal (c représentant le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines, u celui des unités) et possédant les propriétés suivantes :

- Ils diminuent de 99 si l'on intervertit les deux chiffres extrêmes.
- Ils diminuent de 45 si l'on intervertit les deux derniers chiffres.

Exercice 33 : 1-) Déterminer les entiers naturels x dont le cube est un diviseur du nombre 18360.

2-) En déduire les solutions, dans $\mathbb{N}$ de l'équation d'inconnue x :

$$x^3[x^2(x + 1)^2] = 18360$$

3-) Soit n un nombre qui s'écrit $\overline{36723}$ dans le système décimal.

Existe-t-il un entier naturel b tel que n s'écrive $\overline{442003}$ dans le système de base b ?

Exercice 34 : 1-) Etudier les restes de la division par 7 de 2^n et 3^n .

2-) Résoudre alors l'équation : $2^x + 3^y \equiv 0[7]$.

Exercice 35 : Déterminer un entier naturel de trois chiffres dont le produit par 23 se termine par 342 est un entier supérieur à 200.

Exercice 36 : 1-) Combien y a-t-il de multiples de 17 compris entre 1000 et 2500 ?

2-) Calculer la somme des multiples de 37 compris entre 5000 et 7000.

Exercice 37 : On note d le plus grand commun diviseur de a et b

α et β les quotients de a et b par d .

Déterminer a et b sachant que $\alpha + \beta = 7$ et $ab = 60d$

Exercice 38 : On note d et m le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des entiers naturels x et y .

Calculer x et y sachant que : $4m - 9d = 60$ et $3 < d < 10$

Exercice 39 : 1-) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers

2-) Démontrer si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$

3-) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ le système
$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$

avec $\text{PPCM}(a, b) = m$

Exercice 40 : Déterminer le nombre $N = 2^\alpha \times 5^\beta$.

Sachant que ses diviseurs ont pour somme 42.

Exercice 41 : 1-) Trouver les couples d'entiers naturels a et b ayant pour somme 96 et pour PGCD 12

2-) Trouver les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ ayant pour produit 6480 et pour PGCD 18

Exercice 42 : 1-) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que : $a^2 - b^2 = 1620$ et tels que le PGCD de a et b soit égal à 6

2-) Déterminer tous les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 36 et le PPCM est 756

Exercice 43 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On note n le PPCM de a et b et d leur PGCD.

Déterminer a et b pour qu'ils vérifient les trois conditions suivantes $a \leq b$, $a + b = 105$ et $m = 12d$.

Exercice 44 : Pour tout couple d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a < b$, on note d le PGCD de a et b et m leur PPCM. Trouver l'ensemble E des couples $(a ; b)$ tels que $m - d = 77$.

Exercice 45 : Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a \leq b$ et tels que

$m + 11d = 203$ Ou m désigne le PPCM de a et b et d leur PGCD.

Exercice 46 : a-) Trouver l'ensemble des diviseurs de 276

b-) trouver toutes les paires d'entiers naturels dont le PGCD, d et le PPCM, m vérifient $m + 3d = 276$ et $10 < d < 30$.

Exercice 47 : Déterminer les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ non nuls avec $a \leq b$ tels que leur PGCD, d et leur PPCM, m vérifient $2m + 3d = 78$

Exercice 48 : 1-) On considère les nombres $a = 2n + 3$ et $b = n + 1$, où n est un entier naturel.

Montrer que, quelque soit n , a et b sont premiers entre eux.

2-) On considère les nombres $a = 6n - 7$ et $b = 4n - 5$, où n est un entier naturel.

Montrer que, quelque soit n , a et b sont premiers entre eux.

Exercice 49 : Soit n un entier naturel, on pose $a = 45n + 76$ et $b = 35n + 57$. Montrer que le PGCD de a et b est égal à 1 ou 19.

Exercice 50 : Quel est le plus petit entier naturel ayant 15 diviseurs positifs ?

Exercice 51 : Déterminer les entiers naturels, écrit avec deux chiffres dont le nombre de diviseur est le plus grand possible.

Exercice 52 : Trouver le PGCD de 1683 et 969.

En déduire tous les couples (x, y) d'entiers relatifs, solutions des équations suivantes : $969x - 1683y = 51$ (on vérifiera que $(7 ; 4)$ est une solution)
 $969x - 1683y = 102$; $969x - 1683y = 84$.

Exercice 53 : Si d est le PGCD de deux entiers naturels a et b , quel est le PGCD des entiers : $a' = 13a + 5b$ et $b' = 5a + 2b$?

Exercice 54 : On considère l'équation (E) : $x^2 - 7y^2 = 3$.

1-) Justifier que si le couple (x, y) est solution alors $x^2 \equiv 3[7]$.

2-) Déterminer les restes possibles de la division de x^2 par 7.

3-) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution.

Exercice 55 : Soit n un entier relatif on pose $d = \text{PGCD}(n + 5, 3n - 6)$.

1-a) Montrer que d divise 21.

b) En déduire les valeurs possibles de d .

c) Montrer que : $d = \text{PGCD}(n + 5, 21)$

2-) Démontrer que $d = 21 \Leftrightarrow n \equiv 16[21]$.

3-a) Démontrer que 7 divise $d \Leftrightarrow n \equiv 2[7]$.

b) Soit k entier. Démontrer que si $n \equiv k[7]$.

c) Démontrer que $n \equiv 2[7] \Leftrightarrow n \equiv 2$ ou 9 ou $16[21]$.

d) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $d = 7$.

Exercice 56 : Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = 3^n + 5$ et $V_n = 3^n - 2$.

a) Déterminer les valeurs possibles de $\text{PGCD}(U_n, V_n)$.

b) Déterminer les valeurs n pour lesquelles 7 divise V_n .

c) En déduire suivants les valeurs de n , la valeur de $\text{PGCD}(U_n, V_n)$.

Exercice 57 : n est un entier relatif. On pose $a = n^2 - 3n + 6$ et $b = n - 1$.

1-) Vérifier que $n^2 - 3n + 6 = (n - 1)(n - 2) + 4$.

2-) Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(n - 1, 4)$.

3-a) Quels sont les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a, b)$?

- c) L'entier n s'écrit : $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$, ou $n = 4k + 3$. Où k est un entier. Pour chacune de ces quatre formes, déterminer $\text{PGCD}(a, b)$.

Exercice 58 : Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1-) On suppose n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

- Montrer que M et N sont des entiers impaires.
- En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N .

2-) On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$ avec p entier naturel.

- Montrer que M et N sont des entiers pairs.
- En remarquant que $N = M + 2$ déterminer le PGCD de M et N .

Exercice 59 : 1-) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$ $11n - 24m = 1$.

- Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
- En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation (1).
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

- Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
- (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.
- Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$) valable pour tout entier naturel n non nul.

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.

- Montrer que tout diviseur de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
- Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Exercice 60 : Le but de l'exercice est de déterminer les couples (a, b) d'entiers vérifiant l'équation (1) : $a^2 - 2b^2 = 1$.

1-) On suppose que (a, b) est solution.

- Prouver que a est impair.
- En déduire que $a^2 - 1$ est un multiple de 4 puis que b est pair.
- Montrer que a et b sont premiers entre eux.

2-a) Donner une solution évidente de (1).

b) Montrer que si (a, b) est solution de (1), alors le couple $(3a+4b ; 2a+3b)$ l'est également.

c) Déterminer trois autres couples solution de (1).

Exercice 61 : Soit n un entier naturel. On pose $d = \text{PGCD}(n^3 + n, 2n + 1)$.

- Démontrer que n et d sont premiers entre eux.
- Démontrer que $d = \text{PGCD}(n^2 + 1, 2n + 1)$.
- Démontrer que $d = 1$ ou $d = 5$.

- 4) En raisonnant modulo 5, démontrer que $d = 5 \Leftrightarrow n \equiv 2[5]$.
 5) En déduire les valeurs de n pour lesquelles la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ est irréductible.

Exercice 62 : Déterminer les entiers n tels que $n^2 \equiv n[11]$.

Exercice 63 : Le nombre n désigne un entier naturel.

- 1-a) Montrer que : $3n^2 + 15n + 17 = (n + 1)(3n + 2) + 5$.
 b) En déduire que, suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de $3n^2 + 15n + 17$ par $n + 1$.
 c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 17$.
 2-) Montrer que $3n^2 + 15n + 17$ est divisible par $n + 1$ pour tout entier naturel n .
 3-) Déduire de ce qui précède que quel que soit n , $3n^2 + 15n + 17$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 64 : On désigne n un entier naturel.

- 1-) Montrer que le PGCD de $n - 1$ et $n + 3$ est le même que celui de $n + 3$ et 4. Quelles valeurs peuvent prendre le PGCD de $n - 1$ et $n + 3$.
 2-) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n - 1$ divise $n + 3$.
 3-) Montrer que pour tout n , les entiers $n - 1$ et $n^2 + 3n - 2$ sont premiers entre eux.
 4-) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n - 1)(2n + 1)$ divise $(n + 9)(n^2 + 2n - 2)$.

Exercice 65 : 1-) Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a + b, ab) = d$ où d est un nombre premier.

- a) Démontrer que d divise a^2 (on remarquera que $a^2 = a[(a + b) - ab]$.
 b) En déduire que d divise a . On considère donc, de même, que d divise b
 c) Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = d$.
 2-) On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
 a) Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$
 b) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a + b, ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$

Exercice 66 : Partie I

Soit x un nombre réel.

- 1) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2) - 4x^2$.
 2) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

- 1) Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
 2) Montrer que, tout diviseur de A divise n , divise 2.
 3) Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.
 4) Dans cette question on suppose que n est impair.
 a) Montrer que A et B sont impairs.
 En déduire que d est impair.

- b) Montrer que d divise n .
- c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
- 5) On suppose que n est pair.
 - a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
 - b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$ où p est impair.
 - c) Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$ (on pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4).

Exercice 67 : 1-) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 2159 et 9525.

2-) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour les quels on a :

$$34x \equiv 2[15]$$

3-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2159x + 9525y = 1270$

Exercice 68 : Soit n et d deux entiers relatifs non nuls tels que d divise n .
Démontrer que pour tous entiers relatifs a et b on a : $a \equiv b[n] \Rightarrow a \equiv b[d]$

Exercice 69 : Un nombre n de quatre chiffres est tel que les restes des divisions est de 21865 et 33509 par n soient respectivement 37 et 53.
Montrer que n ne peut s'écrire avec 4 chiffres.

Exercice 70 : Déterminer l'entier naturel n , écrit avec 4 chiffres tel que les restes des divisions euclidiennes de 39818 et 62566 par n soient respectivement 37 et 53.

Exercice 71 : Quel est l'ensemble des diviseurs de 72 ?

Soit p un nombre entier : mettre le nombre entier relatif naturel $p^2 - 6p - 63$ sous la forme d'une différence de deux entiers naturels, l'un étant un carré parfait, l'autre ne dépendant pas de p .

En déduire tous les couples (p, q) d'entiers naturels solutions de l'équation :

$$p^2 - 6p - 63 = q^2$$

Exercice 72 : On considère trois entiers naturels non nuls a , b et c .

Le PGCD de a et b est 24, celui de b et c est 36.

Quel est le PGCD de a , b et c ?

Trouver toutes les valeurs possible de ces trois nombres sachant que

$$a + b + c = 300.$$

Exercice 73 : Trouver les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 14 et 34

Exercice 74 : Démontrer que, pour tout entier naturel n , non nul :
« n est un carré parfait » équivaut à « n possède un nombre impair de diviseurs »

Exercice 75 : Soit a et b deux entiers non nuls.

Soit d leur PGCD et soit m leur PPCM

Montrer que si $d = b - a$ on a la relation $b^2 - a^2 - d^2 = 2d^2 \frac{m}{b}$

Exercice 76 : Montrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 1 = y^2$

Exercice 77 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls, démontrer que :

$$\text{PGCD}(13a + 8b ; 5a + 3b) = \text{PGCD}(a ; b)$$

Exercice 78 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système
$$\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + y^3 = 1 \end{cases}$$

Exercice 79 : Etant donné un entier naturel n , on considère les deux nombres a et b tels que $a = 2n^2$ et $b = n(2n + 1)$ on désigne par d le PGCD de a et b et par m leur PPCM.

Montrer que l'on a : $b - a = d$ et $b^2 - a^2 = m - d^2$.

Exercice 80 : n désigne un entier naturel.

Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisible par $n + 1$.

Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

En déduire que, quelque soit n , $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 81 : Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'équation $xy = 3x + 2y + 54$.

Exercice 82 : Etablir que, quels que soient les entiers relatifs a, b, c $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a - bq)$

Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $\text{PGCD}(5n^3 - n ; n + 2) = \text{PGCD}(n + 2 ; 38)$.

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $5n^3 - n$.

Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $(n + 2)$?

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $\text{PGCD}(5n^3 - n ; n + 2) = 19$

Exercice 83 : 1-) n étant un entier relatif quel conque, on pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.

a-) Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD A et 4 .

b-) Déterminer, suivants les valeurs de n , le PGCD de A et B

2-) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

Exercice 84 : On note n un entier naturel non nul, A l'entier naturel $3n + 1$ et B l'entier naturel $5n - 1$.

Démontrer que le PGCD de A et B est un diviseur de 8 .

Pour quelles valeurs de n , ce PGCD est-il égal à 8 ?

Calculer alors le PPCM de A et B .

Exercice 85 : Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 . En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7 .

Déterminer les restes S de la division par 7 des puissances de 2 .

Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7. Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire $a = \overline{1001001000}$ et $b = \overline{100010001000}$ vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p . sont-ils divisible par 7.

Exercice 86 : Résoudre l'équation : $3b - 8a = 0$ où $(a; b)$

$\in \mathbb{Z}^2$. En déduire l'ensemble des couples $(a; b)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui sont solutions de l'équation : $3a - 8b = 1$ $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$.

Un entier non nul A , s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base cinq et $\overline{abc}$ dans le système de numération de base sept.

Déterminer a , b , c et donner l'expression de A dans le système décimal.

Exercice 87 : Démontrer que, si n n'est pas un multiple de 3, le nombre $A = 5^{2n} + 5^n + 1$ est divisible 31. Quel est le reste de la division de A par 31 si n est multiple de 3.

1-) Trouver toutes les paires d'entiers naturels a et b tel que l'on ait

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 42 \\ \text{PPCM}(a; b) = 1680 \end{cases}$$

2-) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $8x \equiv 7[5]$

3) Résoudre l'équation $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $336x + 210y = 294$.

Exercice 88 : On considère trois entiers naturels non nuls a , b , c . Le plus grand commun diviseur de a et b est δ ; celui de b et c est δ' . Quel est le plus grand commun diviseur de a , b , c ? Sachant que $\delta = 12$, $\delta' = 18$ et que $a + b + c = 102$. Déterminer toutes les valeurs possibles des 3 nombres a , b , c

Exercice 89 : 1-) Déterminer le PGCD (2688; 3024)

2-) Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs

Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

$$2688x + 3024y = -3360 \quad (1)$$

$$8x + 9y = -10 \quad (2)$$

Vérifier que $(1; -2)$ est une solution particulière de l'équation (2)

Déduire de ce qui précède les solutions de (2)

Exercice 90 : On considère les trois entiers naturels abc qui s'écrivent dans la base n , $a = 111$, $b = 114$, $c = 13054$.

Sachant que $c = ab$, déterminer n , puis l'écriture de chacun des nombres a , b , c dans le système décimal.

Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by = 1$

Exercice 91 : Combien y a-t-il de multiples de 11 compris entre -1000 et 1000 ?

Exercice 92 : a et b étant deux entiers naturels premiers vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x; y)$ éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que : $x^2 - y^2 = ab^2$.

Applications : déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ dans les deux cas suivants : $(a; b) = (7; 2)$; $(a; b) = (11; 5)$.

Exercice 93 : Les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels sont

$$\text{définies par } \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 31 \\ u_{n+2} = 12u_{n+1} - 55u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_1 = -11 \\ v_{n+2} = 12v_{n+1} - 35v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Les suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = u_n + v_n \text{ et } y_n = u_n - v_n.$$

Calculer x_0 , en utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite x est une suite géométrique de raison 5.

Montrer de même que la suite y est une suite géométrique.

Calculer x_n et y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de u_n et v_n en fonction de n .

La question 3 nous donne : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n$.

soit $n \in \mathbb{N}$ on pose $d_n = \text{PGCD}(u_n; u_{n+1})$. Calculer $u_{n+1} - 5u_n$ et $7u_n - u_{n+1}$. utiliser les résultats de calcul pour montrer que d_n est égal à 1 ou à 2.

u_n et u_{n+1} sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 94 : Trouver tous les couples de nombres entiers relatifs x et y qui satisfont l'équation : $8x - 5y = 1$. (On pourra chercher d'abord un couple particulier qui vérifie cette équation).

Application : un entier positif N divisé par 8, donne pour reste 1 ce même nombre, divisé par 5 donne pour reste 2.

Quel reste donne-t-il si on le divise par $8 \times 5 = 40$?

Trouver N , sachant que $3940 < N < 4000$.

Exercice 95 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $661x - 991y = 1$.

soit (u_n) et (v_n) les suites arithmétiques définies par : $\begin{cases} u_0 = 3 ; v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n + 991 \\ \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = v_n + 661 \end{cases}$

Déterminer tous les couples $(p; q)$ d'entiers naturels inférieurs à 2000, tels que : $u_p = v_q$.

Exercice 96 : Calculer $\text{PGCD}(3^{24} - 1; 3^{15} - 1)$ et $\text{PGCD}(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$

Trouver l'entier naturel tel que le nombre 289×6^n ait 48 diviseurs

Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que : $a + b = 84$ et

$$\text{PGCD}(a, b) = 12$$

1-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5X - 3Y = 2$

un entier naturel A s'écrit : $\overline{55}$ et $\overline{37}$ respectivement dans les bases X et Y . un

entier naturel B s'écrit $\overline{121}$ et $\overline{59}$ respectivement dans les bases X et Y .

Déterminer X et Y puis A et B

2-) Dans le système décimal un entier naturel n s'écrit : $XXYY$ avec $X \neq 0$.

a) démontrer que n est un multiple de 11.

b) déterminer les couples d'entiers naturels $(X; Y)$ tels que n soit un carré parfait.

Déterminer le nombre de diviseurs naturels et l'ensemble des diviseurs de n .

Exercice 97 : Le nombre 28 est-il parfait ?

Déterminer un nombre premier p tel que $2^4 p$ soit un nombre soit un nombre parfait.

soit n et p deux entiers naturels tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n p$ soit parfait ?

Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme pour que $n < 10$.

Exercice 98 : Dans un système de numération de base a , on considère les nombres $A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$.

1-) Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.

2-) a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que : $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. En déduire que a divise 8.

b) Déterminer alors a .

L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214 écrire ce nombre dans la base 4.

Dans cette question on suppose que $a = 4$.

Ecrire A , B et C dans le système décimal

Montrer alors que $C = A \times B = \text{PPCM}(A; B)$. En déduire que : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$. vérifier que $(19; -13)$ est une solution de cette équation. Résoudre cette équation.

Exercice 99 : On considère l'équation (E) : $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $11p - 7q = -4$.

1-) a) Vérifier que $(-1, -1)$ est solution de (E).

b) Résoudre (E).

2-) a) Résoudre les équations (F) et (G)

(F) : $X \in \mathbb{Z}$, $2X \equiv 3[7]$

(G) : $X \in \mathbb{Z}$, $9X \equiv 4[11]$

b) Déduire de 1-) et de 2-) les solutions du système $\begin{cases} 2X \equiv 3[7] \\ 9X \equiv 4[11] \end{cases}$, $X \in \mathbb{Z}$.

Exercice 100 : Il s'agit de résoudre le système (S) $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[4] \end{cases}$

Déterminer un couple d'entier (α, β) solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.

En déduire un couple (u_0, v_0) solution de l'équation ci-dessous, puis résoudre complètement cette équation $23u - 7v = -6$.

Démontrer que x est solution de (S) si et seulement si il existe (u, v) un

couple d'entier vérifiant $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduire l'ensemble de solution de (S).

Exercice 101 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1-) Démontrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .

2-) a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n .

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3-) Démontrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4-) a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a et b .

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 102 : Démontrer que, quelque soit l'entier non nul n ,

$A = n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 12.

$B = n^2(n^4 - 1)$ est divisible par 60.

Exercice 103 : On considère l'équation (E) : $324x - 245y = 7$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).

1-) Montrer que pour toute solution (x, y) de l'équation (E), x est multiple de 7 ?

2-) Déterminer une solution (x_0, y_0) et en déduire toutes les solutions de (E).

3-) Soit d le PGCD des éléments du couple (x, y) solution de (E). Quelles sont les possibles de d ?

Déterminer les solutions de (E) tes que x et y soient premier entre eux ?

Exercice 104 : 1-) Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et $4^6 - 1$.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 1$, $U_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$

2-) Calculer les termes U_2, U_3 et U_4 de la suite (U_n) .

3-) a) Montrer que la suite (U_n) vérifie, pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = 4U_n + 1.$$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , U_n est un entier naturel.

c) En déduire, pour tout entier naturel n , le PGCD de U_n et U_{n+1} .

4-) Soit (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0 .

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Déterminer, pour tout entier n , le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et $4^n - 1$.

Exercice 105 : 1-) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD des nombres 231 et 3311.

2-) Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $A(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$B(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

On rappelle que, quelque soit n , $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

a) Démontrer, par récurrence, que $\forall n, B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) On suppose que n est un multiple de 3.

Déterminer, dans ce cas, le PGCD de $A(n)$ et $B(n)$.

c) Vérifier le résultat obtenu dans le particulier où $n = 21$.

Exercice 106 : 1-) a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseur du nombre 5929.

b) Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD et PPCM sont les solutions de l'équation $x^2 - 91x + 588 = 0$.

2-) Démontrer que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

Exercice 107 : 1-) Le nombre 28 est-il parfait ?

2-) Déterminer un nombre premier p tel que 2^4p soit un nombre parfait.

3-) Soit n et p deux entiers naturels tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n p$ soit parfait.

Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

Exercice 108 : 1-) Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul.

Démontrer que p et q^n sont premiers entre eux.

2-) Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux).

Démontrer que p divise a_0 et q divise a_n .

3-) Factoriser le polynôme : $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

4-) Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $x^5 + 127x^4 - 12x^3 + x^2 + 7x - 1 = 0$.

Exercice 109 : Déterminer les entiers naturels tels que :

a) $\text{PPCM}(n, 6) = 96$ b) $\text{PPCM}(n, 72) = 216$

c) $600 < n < 1100$ et $\text{PGCD}(n, 630) = 105$.

Exercice 110 : 1-a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 5 929.

b-) Trouver les couples $(a ; b)$ dont le PGCD et PPCM sont solutions de l'équation $x^2 - 91x + 588 = 0$.

2-) Démontrer que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ divisible par 7.

Exercice 111 : Un nombre x s'écrit $\overline{bbaa}$ en base 3. Quelles valeurs peuvent prendre a et b ?

Le même nombre x s'écrit $\overline{bba}$ en base 6. Trouver une relation liant a et b . En déduire les valeurs de a et b . Ecrire x dans la base 10.

Exercice 112 : Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n ($n \geq 6$) : $a = \overline{2310}$, $b = \overline{252}$

On désigne par d leur plus grand commun diviseur.

1. Démontrer que $(2n + 1)$ divise a et b et que $d = 2(2n + 1)$ ou $d = 2n + 1$ suivant n pair ou impair.

2. On prend $n = 6$, résoudre l'équation $ax + by = -26$.

Exercice 113 : Déterminer l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a; b) + \text{PPCM}(a; b) = b + 9$.

Exercice 114 : 1-) Déterminer les diviseurs de 504.

2-) Montrer qu'il existe un entier naturel inférieur à 504.

3-) Déterminer le plus petit entier naturel n , tel que les solutions de l'équation $x^2 - 2nx + 504 = 0$ soient des naturels.

Exercice 115 : On se propose de déterminer tous les entiers relatifs N tel que :

$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$

- Vérifier que 239 est solution de ce système.
- Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant $17x - 13y = 4$.
- Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$.
- En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que : $N = 18 + 221k$
- Démontrer l'équivalence entre $N = 18[221]$ et $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

Exercice 116 : Déterminer deux entiers naturels a et b vérifiant les entiers suivantes : $\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases}$ avec $d = \text{PGCD}(a; b)$

Exercice 117 : Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que : $2^x \equiv x^2[9]$

Exercice 118 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $d = \text{PGCD}(2n + 8; 3n + 15)$

- Montrer que d divise 6.
- Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $d = 6$.

Exercice 119 : Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels dont le PGCD d et le PPCM m vérifient la relation : $8m = 105d + 30$.

Exercice 120 : On pose : $\begin{cases} \mu = 210\delta \\ y - x = \delta \end{cases} (S)$

- Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210.
- Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, δ leur PGCD et μ leur PPCM, déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ vérifiant le système (S)

Exercice 121 : 1-) Déterminer $\text{PGCD}(816 ; 528)$

2-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $816x - 528y = 96$.

3-) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs z tels que : $\begin{cases} 3z \equiv 4[11] \\ 7z \equiv 4[17] \end{cases}$

Exercice 122 : 1-) Démontrer que pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2-) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$

- Vérifier que 87 et 31 sont premiers entre eux.
- En déduire un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tels que : $87u + 31v = 1$ puis un couple $(x_0; y_0)$ solution de (E).
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 123 : α et β sont deux entiers et $n = 2^\alpha \times 3^\beta$.

Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n .

1-) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2-) En déduire.

Exercice 124 : Le produit de deux entiers naturels a et b ($a < b$) est 11340. On note d leur PGCD.

1-a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11340 ?

b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 2$

2-) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.

a) Démontrer que $d=18$.

b) En déduire a et b .

Exercice 125 : n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1-) Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2-) On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β .

a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3-) On considère les nombres a et b définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \text{ et } b = 2n^2 - n - 1.$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4-a) On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $n(2n + 1)$.

Montrer que δ divise d , puisque $\delta = d$.

b) En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n .

c) Application :

Déterminer Δ pour $n = 2001$;

Déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 126 : Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1-a) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ de nombres entiers relatifs ; solution de l'équation : (E) $8x - 5y = 3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p ; q)$ de nombres entiers vérifiant : $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Montrer que le couple $(p ; q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9[40]$.

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2-a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel on a : $2^{3k} \equiv 1[7]$

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3-) Soit a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$. On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 127 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $x - 9y = 13$.

2. Déterminer tous les éléments $(a; b)$ de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation suivante : $\text{PPCM}(a; b) - 9\text{PGCD}(a; b) = 13$.

Exercice 128 : Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On considère, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers a et b :

$$a = 11n + 3; b = 13n - 1.$$

1. Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 60.
2. Résoudre pour $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$, l'équation $13x - 11y = 50$. En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 pour plus grand commun diviseur.
3. Pour quelles valeurs de n , les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

Exercice 129 : Déterminer les entiers naturels s'écrivant $\overline{abca}$ dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et dont le reste dans la division par 99 est 1.

Exercice 130 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $23x - 17y = 6$.
2. Déduire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17, le reste soit 8.

Exercice 131 : Quatre nombres entiers strictement positifs a, b, c, d forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier premier avec a . Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient autre relation : $10a^2 = d - b$.

Exercice 132 : On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(x; y)$ suivante : (E) : $x^2 + 10x = y^2 + 46$.

1. Vérifier que l'équation (E) est équivalente à : $(x + 5)^2 - y^2 = 71$.
2. Démontrer que 71 est premier.
3. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 133 : On considère l'équation : (E) $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 19x + 9y = 3$.

1. Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors x est un multiple de 3.
2. Résoudre l'équation (E)
3. Déterminer les couples (x, y) solutions de l'équation (E) tels que le PGCD de x et y soit maximum

Exercice 134 : Déterminer le plus petit entier n qui possède les propriétés suivantes :

- Son écriture décimale se termine par 6 ;
- Si on efface le 6 et qu'on le place à gauche, le nombre obtenu est le quadruple de n .

Une piste : pour la multiplication et calculer les chiffres.

Exercice 135 : Déterminer les diviseurs d 504.

Montrer qu'il existe un entier naturel inférieur à 504 et possédant le même nombre de diviseur que 504. Déterminer le plus petit entier naturel n , tel que les solutions de l'équation $x^2 - 2nx + 504 = 0$ soient des entiers naturels.

Exercice 136 : Soit à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $15x^2 - 7y^2 = 9$.

1-) a) Démontrer que dans le système décimal, le dernier chiffre d'un carré est 1; 4; 5; 6 ou 9.

b) En déduire que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5.

2-) Résoudre l'équation (E).

Exercice 137 : 1-) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$

Donner une solution particulière de l'équation (E)

Résoudre l'équation (E)

2-) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombre entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

Montrer que le couple (a ; -b) est solution de (E).

Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3-) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$

b) Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièce de monnaie dans une auberge.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 138 :

On considère l'équation (E): $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $29x - 11y = 13$

1-) Ecrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. En déduire une solution particulière de l'équation (E). Donner la solution générale de cette équation

2-) On considère maintenant l'équation (E') $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ $29x - 11y = 5$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 139 : 1-) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-2}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $S_n = (n-1)2^n - n \cdot 2^{n-1} + 1$.

2-) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Exercice 140 : On considère l'entier naturel n représenté en base b par : $n = \overline{342x}$

Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit :

- Divisible par 5, quand b = 6.
- Divisible par 3, quand b = 7.
- Divisible par 12, quand b = 17.

Exercice 141 : Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

- $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$ est divisible par 11.
- $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 3.

Exercice 142 :

1. Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 18 \\ \text{PPCM}(a; b) = 990 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x + 11y = 4$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} 3n \equiv 1[5] \\ 7n \equiv 9[11] \end{cases}$

Exercice 143 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3\text{PPCM}(a; b) = ab \end{cases}$

Exercice 144 : Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8.

Déterminer cet entier n .

Exercice 145 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a; b) = d$; $\text{PGCD}(a + b; ab) = d'$.

Montrer que d est un diviseur de d' .

Exercice 146 : Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres $a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1-a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montres que a_n et c_n sont divisible par 3.

c) Montrer en utilisant la liste des nombres premiers inférieures à 100 donné ci-dessous, que b_3 est premiers.

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs de a_6 .

e) Montrer que : $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation : (1) $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a) Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1) .

c) Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieur à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Exercice 147 : Trouver toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $x = 26x95y$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

Exercice 148 : 1-) Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x ; $(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$.

Dans toute la suite de l'exercice on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2-a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = \lambda k$.

Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b) Déduire de la question précédente que : $2^{2004} - 1$ est divisible par 7 ; par 63 puis par 9.