

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

Préparation à l'Examen National (SM)

Exercice

On admet pour tout l'exercice que **2027** est un nombre premier.

1. (a) Justifier : $2026^{2026} \equiv 1 \pmod{2027}$

(b) Étudier le reste de la division euclidienne de 2026^n par 2027.

(c) On considère la somme finie : $S = 1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + \dots + 2026^{2026}$.

Démontrer que : $S \equiv -1 \pmod{2027}$

2. On pose l'entier A tel que : $A = 2026^{2027} + 2027^{2026}$.

(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 2026.

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 2027.

3. Soit n l'entier défini par $n = 2026 \times 2027$.

(a) Montrer que l'entier $A + 1$ est divisible par 2027. Est-il divisible par 2026 ?

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de A par n .

4. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2026^n + n$.

(a) Démontrer que pour tout entier n pair, on a : $u_n \equiv n + 1 \pmod{2027}$.

(b) Montrer qu'il existe exactement deux entiers $n_0 \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ tels que u_{n_0} soit divisible par

2027. Déterminer ces deux valeurs.

5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 2026x - 2027y = 3$.

(a) Démontrer que l'équation (E) admet un ensemble infini de solutions entières.

(b) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) évidente de l'équation (E) .

(c) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

(d) Déterminer l'unique entier $a \in \{0, 1, \dots, 2026\}$ tel que : $2026a \equiv 1 \pmod{2027}$