

BAC 2020

Exercice N° 01 : Principal 2020 - 4 points

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$

- 1) a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est impair
 - b) Déterminer suivant n , le reste modulo 8 de 5^n
 - c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1 \pmod{8}$
- 2) a) Montrer que

$$\text{si } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases} \text{ alors } x \equiv 257 \pmod{1000}$$
 - b) montrer que pour $n \geq 3$, $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$
 - c) Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier : $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?
- 3) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
 - b) Soit d le PBCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que $d \neq 7$.
 - c) Trouver alors d

Exercice N° 02 : Contrôle 2020 - (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k

- 1) Montrer chacun des résultats suivants :

$$k^3 \equiv 1 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r \in \{1, 2, 4\}$$

$$k^3 \equiv 6 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r \in \{3, 5, 6\}$$

$$k^3 \equiv 0 \pmod{7} \text{ si et seulement si } r = 0$$
- 2) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$

- 3) Soit $a \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par $E_a = \{(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}, x^3 + y^3 = a\}$

Montrer que les équations :

$$x^3 + y^3 = 3 \pmod{7} \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 = 4 \pmod{7}$$

n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- 4) On considère l'ensemble E_{9990} . Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x, y) \in E_{9990}$
 - a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod{7}$ ou $y \equiv 0 \pmod{7}$
 - b) Déterminer E_{9990} .

BAC 2019

Exercice N° 03 : Principal 2019 - 5 points

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x - 13y = 6$
 - a) Vérifier que $(2, 4)$ est une solution de (E)
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$
- 2) Justifier que $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ et en déduire que -8 est une solution de (E')
- 3) Soit x_0 une solution de (E')
 - a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$
 - b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis que $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$
 - c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E')
 - d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$
- 4) Résoudre dans le système
$$\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \\ (x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13} \end{cases}$$

Exercice N° 04 : Contrôle 2019 - (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :

$$P_1 : 3x - 2y - 2z = 1 \quad \text{et} \quad P_2 : 4x - 11y + 2z = 0$$

- 1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ
- b) Donner une représentation paramétrique de Δ

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières

- 2) On considère dans l'équation (E) $7x - 13y = 1$.
Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E) et résoudre (E).
- 3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système (S) :
$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases}$$
 - a) Montrer que (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si
$$\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = 11y - 4x \end{cases}$$
 - b) Déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières

BAC 2018

Exercice N° 05 : Principal 2018 - 5 points

A) Soit q un entier naturel

- 1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair
- 2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$

B) On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets d'entiers non nuls (m, n, p) tel que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$

- 1) Vérifier que le triplet $(2, 1, 5)$ est un élément de A

Dans la suite de l'exercice, on suppose que (m, n, p) est un élément de A .

- 2) a) Montrer que q est impair
b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$
c) Montrer alors que m est différent de 1
- 3) On suppose que $m \geq 2$
a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ sont pairs
b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$
Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m} .
En déduire que $d = 2$
c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$
Déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$
- 4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$
- 5) On suppose que $m \geq 3$
a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$
b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier k , les restes possible de 3^k dans la division euclidienne par 16.
c) En déduire qu'il n'existe pas de triplet (m, n, q) éléments de l'ensemble A tel que $m \geq 3$.
- 6) Déterminer l'ensemble A .

BAC 2017

Exercice N° 06 : Principal 2017 - 4 points

- 1) Soit x un entier non nul premier avec 53
a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}
b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$
- 2) Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ où $x \in \mathbb{Z}$
Montrer que 2^9 est une solution de (E_1)

- 3) Soit x une solution de l'équation (E_1)
a) Montrer que x est premier avec 53
b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$
c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$
- 4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$
b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E_1)
- 5) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71u - 53v = 1$
a) Vérifier que $(3, 4)$ solution de l'équation (E_2)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2)
- 6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$

BAC 2016

Exercice N° 07 : Principal 2016 - 4 points

- 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$.
Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$
- 2) Soit $b = (9217)^4$.
Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$
- 3) a) Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.
Montrer que $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$
b) En déduire que pour tout entier naturel n on a :
 $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$
- 4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5
b) Montrer, par récurrence que pour tout entier naturel n ,
 $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$
- 5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$
b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$
c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10 000

Exercice N° 08 : Contrôle 2016 - (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

- 1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$
- 2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que :
 $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod{4}$
a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{5}$
b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{2}$
c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$
- 3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 25x - 21y = 4$.
a) Vérifier que $(1, 1)$ est une solution de (E)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
c) Déduire l'ensemble A des solutions de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
d) Soit (α, β) un éléments de A . Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
et $n \wedge 5 = 1$, n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

BAC 2015

Exercice N° 09 : Principal 2015 - 4 points

- 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 47x + 53y = 1$
a) Vérifier que $(-9, 8)$ est une solution de (E)
b) Résoudre l'équation (E)
c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53
d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53
- 2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53
- 3) Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=1}^{k=105} 45^k$.
a) Montrer que $44N \equiv 10 \pmod{53}$
b) En déduire le reste de N modulo 53

BAC 2014

Exercice N° 10 : Principal 2014 - 4

points

- 1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$
 - a) Montrer que $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$
 - b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$. On pourra utiliser : $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$
- 2) a) Soit $b \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10
 - b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 3) a) Soit b un entier premier avec 10.
Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$
 - b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}

Exercice N° 11 : Contrôle 2014 - 4 points

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $1111x - 10^4y = 1$
Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E) .
Résoudre l'équation (E) .
- 2) a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$ alors (p, q) solution de (E)
 - b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que :
$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$$
 - c) Déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

BAC 2013

Exercice N° 12 : Principal 2013 - 1.5 points

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

- 1) (A₁) : Soit n un entier.
"Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ "
(A₂) : " L'équation $(E) : 33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ "

Exercice N° 13 : Contrôle 2013 - 3 points

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 2x + 5y = 6$

- 1) Vérifier que $(3, 0)$ est u solution de (E) .
Résoudre (E)
- 2) a) Soit (x, y) une solution de (E) .
Quelle sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?
 - b) Déterminer les couples (x, y) , solutions de l'équation (E) tel que $x \wedge y = 3$

BAC 2012

Exercice N° 14 : Contrôle 2012 - 3 points

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 7x + 18y = 9$
 - a) Montrer que $(9, -3)$ est une solution de (E)
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .
- 2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

BAC 2011

Exercice N° 15 : Principal 2011 - 3 points

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

- 1) $x^3 \equiv x \pmod{2}$
- 2) si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$
- 3) si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$
- 4) si
$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$
 alors $8x - 5y = 7$

BAC 2010

Exercice N° 14 : Principal 2010 - 3 points

Répondre par « Vrai » ou « Faux ».

Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4
- 2) si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux
- 3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$
- 4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$
- 5) si
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$
 alors $x \equiv 19 \pmod{20}$
- 6) si p entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Exercice N° 17 : Contrôle 2010 –(5 points)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

- 1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n , le reste de 7^n modulo 100.
- 2) Dédire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 100k - 1$
- 3) a) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $a^{100} \equiv 1 [100^2]$
b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}

BAC 2009**Exercice N° 18 : Principale 2009 - (QCM)**

- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = 2^n + 3^n$, alors $a_n \equiv 0 \pmod{5}$ pour :
 a) tout entier naturel n pair
 b) tout entier naturel n
 c) tout entier naturel n impair

Exercice N° 19 : Contrôle 2009 - 3 points

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $3x + 4y = -8$

- 1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E)
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
- 2) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soit la droite Δ : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
 a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est multiple de 5.
 b) Soit $N(x, y) \in \Delta$. Vérifier que : $AN = \frac{5}{4}|x|$
 c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

BAC 2008**Exercice N° 20 : Principale 2008 - 3 points**

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$
- 2) a) Soit n, x et y : 3 entiers tels que :
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

- b) On considère le système (S)
$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

Montrer que n est une solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.

- 3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de : 7^{2k} modulo 8
 b) Vérifier que 1991 est solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice N° 21 : Contrôle 2008 - (QCM) 1points

Cocher la bonne réponse. Sans justification

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.
 Alors : a) $n \equiv 0 \pmod{3}$
 b) $n \equiv 0 \pmod{5}$
 c) $n \equiv 0 \pmod{7}$