

Exercices d'Entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2023 - 2024

Barycentre

Exercice 01

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on donne les points $A(3, 4)$; $B(-1, 2)$.

- Place ces points dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$
- Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :
 $\|4\vec{MA} + 5\vec{MB}\| = 45$.
- Détermine puis construis l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :
 $\|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|7\vec{MA} - 2\vec{MB}\|$
- Détermine puis construis l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :
 $\|3\vec{MA} - 2\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$
- Détermine puis construis l'ensemble E_4 des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$.
- Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 1$.

Exercice 02

Dans le plan euclidien P on considère ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = AC = a$ ($a > 0$).

- Construis le barycentre $G = \{(A, 4) ; (B, -1) ; (C, -1)\}$.
- Soit I le point de P défini par $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{CA}$. Montre que I est barycentre des points pondérés $(A, 1) ; (B, -1) ; (C, -2)$. Construis le barycentre I .
- Pour tout réel k , on désigne par F_k l'ensemble des points M du plan tel que :
 $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = ka^2$
 - Détermine la valeur de k pour laquelle B appartient à F_k .
 - Détermine puis construis l'ensemble F_2 .
 - Déterminer puis construire l'ensemble E des points M du plan tel que :
 $a^2 \leq 4MA^2 - MB^2 - MC^2 \leq 2a^2$.
- Déterminer puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :
 $\|4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$.
- Déterminer puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :
 $\|4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$.
- On considère la fonction vectorielle $\vec{f}$ de P dans V telle que $\vec{f}(M) = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$
 - Montre que $\vec{f}$ est un vecteur constant $\vec{v}$ que l'on précisera. Calcule $\|\vec{v}\|$.
 - Détermine puis construis l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :
 $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$

Exercice 03

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

- Construire le barycentre $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$.
 - Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ puis en déduire AG^2 et BC^2 .
- Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|.$$

9. Déterminer puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|.$$

10. Déterminer puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24.$$

11. Déterminer puis construire l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k \text{ (on discutera suivant les valeurs de } k \text{)}.$$

12. Déterminer puis construire l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72.$$

Exercice 04

Soit E un espace affine de dimension 3 ; on donne 3 points A, B, C et f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $f: M \mapsto MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$

- 1) Existe-il point G barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, 3)$; $(C, -2)$? Si oui donne une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$.
- 2) Montre que $f(M) = 2\overrightarrow{MG}^2 + m$ où $m = f(G)$
- 3) Discute suivant les valeurs de m la nature de l'ensemble des points M de E tels que $f(M) = 1$.

Exercice 05

ABC un triangle du plan euclidien P . On pose : $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

- 1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC .
- a) Calcule $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction AB^2 ; AC^2 et de BC^2 .
- b) Déduis en que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Ecris de même les expressions de BG^2 et de GC^2 .
- c) Montre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Autre méthode :

- 2) On note A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[AB]$.
 - a) Calculer en fonction de a, b et c les longueurs AA'^2 ; BB'^2 ; CC'^2 (On utilisera le théorème de la médiane sans justification).
 - b) Montre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
- 3) Détermine l'ensemble (E) .
- 4) Application numérique : $a = 5$; $b = 4$; $c = 3$.

Exercice 06

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on donne les points

$$A(2, 4) ; B(1, 0) ; C(6, 0).$$

- 1) Place ces points dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$
- 2) On appelle H orthocentre du triangle ABC .
 - a) Vérifie que H est le barycentre du système pondéré $\left\{(A, 1); \left(B, \frac{12}{5}\right); \left(C, \frac{3}{5}\right)\right\}$.

b) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tel que

$$5MA^2 + 12MB^2 + 3MC^2 = 140$$

Exercice 07

ABC désigne un triangle. A' le milieu de $[BC]$ et I le milieu $[AA']$.

On pose $f(M) = MB^2 + MC^2 - 2MA^2$ et $g(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$.

- 1) Montre que : $f(M) = AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA'}$ et $g(M) = g(I) + 4MI^2$.
- 2) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = AB^2 + AC^2$.
- 3) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $g(M) = 2g(I)$.

Exercice 08 (Corrigé dans le livre Doni Maths TSE)

Soit le triangle ABC du plan tel que $AB = 3$; $AC = 5$ et $BC = 6$.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

On rappelle que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan.

Exercice 09 (Corrigé dans le livre Doni Maths TSE)

Soit $ABCD$ un rectangle du plan de diagonale $[AC]$ et $[BD]$ de longueur a .

- 1- Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On note G_m le barycentre du système $\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$
 - a) Préciser la position de G_1
 - b) Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.
 - c) Quel est l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a$?
 - d) Quel est l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$?
- 2- Faites une figure représentant le rectangle $ABCD$ et les ensembles $(E_1), (E_2), (E_3)$.

Exercice 10 : (Corrigé dans le livre Doni Maths TSE)

Soit A, B, C trois points du plan P tels que $AB = AC = 5$ unités ; $BC = 6$ unités.

1. Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Construis le barycentre G des points pondérés $(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)$ puis calcule GA .
3. Soit h l'application de $P \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto h(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$
 - a. Exprime $h(M)$ en fonction de $h(G)$ et MG .
 - b. Calcule $h(A)$ et $h(G)$.
 - c. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M tels que $h(M) = h(A)$.
 - d. E et F sont deux points distincts du plan. Détermine puis construis l'ensemble (Γ) des points M tel que $\frac{ME}{MF} = \frac{3}{2}$.

Exercice 11

P est le plan affine euclidien et ABC désigne un triangle de centre de gravité G . Soit g l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point $M \in P$;

$g(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ et f l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point M de P ; $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. (1, 5pt)

- 1) Démontre que pour tout M de P , on a : $g(M) = 3MG^2 + g(G)$ et $g(G) = -\frac{1}{2}f(G)$.

NB On rappelle que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- 2) Calcule $f(G)$ en fonction de AB , AC et BC et en déduis $g(M)$ en fonction de MG , AB , AC et BC . (1pt)
- 3) En supposant que le triangle ABC est équilatéral de coté a , ($a \in \mathbb{R}_+^*$) déterminer l'ensemble (Γ) des points M de P tels que $\frac{a^2}{4} \leq g(M) \leq \frac{a^2}{2}$. (1, 5pt)

Exercice 12 (Corrigé dans le livre Doni Maths TSE)

- I) Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que : $IA = 2IB$.
- 1) Démontrer que le barycentre des points pondérés $(B, 4)$, $(C, -2)$ et $(D, 2)$ est le milieu de $[AB]$.
- 2) Soit k un nombre réel.
- a) Déterminer et construire l'ensemble (H_1) des barycentres G_k des points pondérés $(A, 2k)$, $(B, 4)$, $(C, 2k - 2)$ et $(D, 2 - 4k)$.
- b) Préciser la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC) .
- 3) Déterminer et construire l'ensemble (H_2) des points M du plan tels que les vecteurs $2\vec{MA} + 2\vec{MC} - 4\vec{MD}$ et $4\vec{MB} - 2\vec{MC} + 2\vec{MD}$ soient colinéaires

Exercice 13 (Corrigé dans le livre Doni Maths TSE)

- 1) DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que la distance de DE est égale à 4 cm, K désigne le milieu du segment $[EF]$ et G le point défini par $\vec{GD} = \frac{1}{2}\vec{FE}$.
- a) Fais une figure.
- b) Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(D, 2)$, $(E, -1)$ et $(F, 1)$.
- c) Démontre que le quadrilatère $GFKD$ est un parallélogramme.
- d) Déduis-en que $GF = 2\sqrt{5}$.
- e) Montrons que le triangle GEF est isocèle en G .
- 2) On note (C) , l'ensemble des points M du plan tels que : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$.
- a) Vérifie que E et F sont des éléments de (C) .
- b) Détermine l'ensemble (C) .
- c) Construis l'ensemble (C) .

Exercice 14

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les 4 points A ; B ; C ; D tel

que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que $\|\vec{DA}\| = \|\vec{DB}\| = \|\vec{DC}\|$
- 2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1)$; (B, m) ; (C, n)
- 3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que $4\|\vec{MA}\|^2 + 3\|\vec{MB}\|^2 + 5\|\vec{MC}\|^2 = k$
- 4) Déterminer le réel k tel que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit élément de (E) que l'on représentera.

Exercice 15

Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de [AC] et un point D tel que

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$$

- Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3). En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].
- Démontrer que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$
- Calculer DA^2 et DB^2
- Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :
 $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
- Vérifier que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E)
- Tracer (E).

Exercice 16

Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

- Soit 3 points A, B, C non alignés et I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. De quel coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre ?
- On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2AC = 1$.

On suppose que : $S = \{M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$

Démontrer que S est une sphère de centre W et de rayons r à préciser.

Exercice 17

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un carré ABCD de côté a ($a > 0$). Soient α un réel et f_α l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui à chaque point M associe l'unique point M' , tel que : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$

- Pour $\alpha = -1$, que peut-on dire de $\overrightarrow{MM'}$? Détermine alors l'application f_{-1} .
- Pour $\alpha = 2$. Soit G_2 le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1); (D, 2)\}$. Détermine et construis le point G_2 .
- On suppose α fixé avec $\alpha \neq -1$. Soit G_α le barycentre des points pondérés (A, α), (B, 1), (C, 1), (D, α). Ecris $\overrightarrow{G_\alpha M'}$ en fonction de $\overrightarrow{G_\alpha M}$. Détermine alors f_α .
- Détermine l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\|$$

Exercice 18

Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD).

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments [AB] ; [CD] et [IJ].

- Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

- Les médiatrices des côtés [AD] ; [BC] se coupent en G. Démontrer que

$$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2.$$

- Démontrer que l'ensemble $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

Exercice 19 : Extrait du Bac TSE 2002

Soit P le plan affine euclidien, A, B, C et D quatre points de P deux à deux distincts.

- 1) Montre que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A, 1)(B, -1)(C, 1)\}$.

- 2) Détermine l'ensemble (S) des points M de P tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD.$$

- 3) On suppose que $ABCD$ est un rectangle. Détermine l'ensemble (Σ) des points M de P tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

Exercice 20

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1); (B, k); (C, -k)\}$.

- 1) Représente les points A, B, C , le milieu I de $[BC]$ et construis les points G_1 et G_{-1} .

- 2) a) Montre que pour tout réel $k \in [-1; 1]$, on a :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

- b) Etablis le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$

- c) Déduis en l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$.

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

- 3) Détermine l'ensemble E des points M de l'espace tel que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

- 4) Détermine l'ensemble F des points M de l'espace tel que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

- 5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectifs $(0; 0; 2)$; $(-1; 2; 1)$ et $(-1; 2; 5)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

- a) Calcule les coordonnées de G_1 et G_{-1} . Montre que les ensembles E et F sont sécants.

- b) Calcule le rayon du cercle $\mathcal{H}$ intersection de E et F .

Exercice 21 : Extrait du Bac TSE 2021

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (-14 + 39i)z + 50$.

1. Démontre que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure notée z_0 .

2. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$.

3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .

- a. Détermine l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ puis écris z_G sous la forme exponentielle.

- b. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4.$$

- c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$?

Exercice 22 : Extrait du Bac TSE 2019

On considère un triangle ABC du plan.

- 1) a. Détermine et construis le point G , barycentre de $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$.
b. Détermine et construis le point G' , barycentre de $\{(A; 1); (B; 5); (C; -2)\}$
- 2) a. Soit J le milieu de $[AB]$.
Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB) .
b. Montre que le barycentre I de $\{(B; 2); (C; -1)\}$ appartient à (GG') .
- 3) Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
Détermine trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de $\{(A; a); (D; d); (C; c)\}$.

Exercice 23 : Extrait du Bac TSE 2017

Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A , I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC .

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_m = \{(A; 1), (B; m), (C; 2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

- 1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.
- 2) Montre que les points G_1, J et C sont alignés.
- 3) Montre que pour tout point M , $\overrightarrow{V_M} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
- 4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.
- 5) Montre que le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle.

Exercice 24 : Extrait du Bac TSE 2015

Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B , à 3 km de C et le village B est à 5 km de C .

Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.