

Exercice 1 *Du double au triple*

Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même.

On sait que cette grandeur double tous les dix ans.

Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Exercice 2 *Loi de refroidissement de Newton*

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi :

"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant".

On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C.

Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes.

Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

Exercice 3 *Dissolution d'une substance*

Une substance se dissout dans l'eau.

On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute.

À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.

Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t .

Exercice 4 *Taux d'alcoolémie*

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = a e^{-t}$$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t) e^t$

Démontrer que g est une fonction affine.

2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a .

3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.

- a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

- b. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5 \text{ gL}^{-1}$.

Exercice 5 *Modèle de Verhulst - Loi logistique continue*

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m.

On note $f(t)$ la taille, en m, d'un plant après t jours. (On a donc $f(0) = 0,1$).

Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$$f'(t) = a f(t) (1 - f(t))$$

où a est une constante dépendant des conditions expérimentales

Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$y' = a y (1 - y)$$

1. On pose, pour tout t de $\mathbb{R}_+$:

$$z(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z , puis la résoudre (sur $\mathbb{R}_+$).

En déduire que pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$, on a : $f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}$

2. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (on arrondira à 10^{-2} près).
3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.
4. Représenter graphiquement la fonction f .
5. Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

Exercice 6 *Décharge d'un condensateur*

On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargeant dans une résistance R . On note $u_C(t)$ la tension au borne du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes).

À l'instant $t = 0$, on sait que $u_C(0) = 3$ V.

Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t .

Exercice 7 *Vitesse d'un parachutiste*

Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 ms^{-1} au moment où son parachute s'ouvre.

On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t .

On admet que la résistance de l'air est donnée par : $R = \frac{Pv^2}{25}$

où P est le poids du parachutiste avec son équipement. ($P = mg$, m = masse et $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$)

1. Démontrer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$(E) : v' = g \left(1 - \frac{v^2}{25} \right)$$

2. On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, et on pose sur $\mathbb{R}_+$: $z = \frac{1}{v-5}$

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.

3. En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 8 Équation de Bernoulli⁽¹⁾

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay + by^n$$

On se propose, dans cet exercice, de rechercher les solutions strictement positives de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. On pose sur $\mathbb{R}$:
- $$z = y^{1-n}$$

(Ceci a bien un sens puisque y est strictement positif)

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.

2. En déduire les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.

Que donne le cas $n = 0$?

Exercice 9 Une équation du second ordre sans terme d'ordre nul

Soient a et b deux nombres réels. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' = ay' + b$$

1. En posant $z = y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant les conditions $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

Exercice 10 Avec second membre variable

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 3y = \sin x$

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation sans second membre associé :

$$(E_0) : y' - 3y = 0$$

2. Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = a \cos x + b \sin x$$

soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f - p$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Désintégration des noyaux radioactifs - Temps caractéristique - Demi-vie - Datation au carbone 14

Dans un corps radioactif, le nombre moyen de noyaux d'atomes qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt est proportionnel au produit de Δt et du nombre $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t . Il existe donc une constante λ strictement positive⁽²⁾, indépendante du temps t telle que :

$$\Delta N(t) = -\lambda N(t) \Delta t$$

(Le signe négatif provient du fait que le nombre de noyaux diminue au cours du temps et que $\lambda > 0$)

Lorsqu'on a affaire à un très grand nombre de noyaux atomiques (ce qui est le cas en pratique) on assimile la fonction $t \mapsto N(t)$ à une fonction continue et dérivable. En faisant tendre l'intervalle d'observation Δt vers 0, la relation ci-dessus s'écrit :

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt$$

⁽¹⁾ La forme générale de l'équation de Bernoulli est $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ où P et Q sont des polynômes (ici P et Q sont des constantes).

⁽²⁾ La constante λ est appelée "constante radioactive du noyau"

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

Ce que, nous autres mathématiciens notons encore :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

1. À l'instant $t = 0$, on suppose que l'on possède un échantillon de N_0 noyaux radioactifs.

Exprimer, pour $t \geq 0$, $N(t)$ en fonction de N_0 , t et λ .

2. On appelle temps caractéristique τ le nombre réel définie par :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

- a. Démontrer que τ est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe (C) de la fonction N au point $t = 0$ et l'axe des abscisses. Illustrer.
 - b. On appelle demi-vie le temps $\tau_{1/2}$ au bout duquel le nombre initial N_0 de noyaux radioactifs a diminué de moitié. Exprimer $\tau_{1/2}$ en fonction de τ .
3. Tous les tissus vivants contiennent du carbone 14 qu'ils renouvellent en permanence jusqu'à leur mort. À partir du moment où le tissu est mort, le carbone 14 se désintègre doucement avec une période de demi-vie égale à 5730 années. À l'aide d'une calculatrice compléter le tableau suivant :

Pourcentage de la quantité initiale de Carbone 14	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
Age (post-mortem) du tissu (en milliers d'années)																			

Exercice 12 Une équation différentielle d'ordre 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

On note S l'ensemble des fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Stabilité de S .

- a. Démontrer que si f et g sont deux éléments de S alors $f + g$ est élément de S .
- b. Démontrer que si f est élément de S et si λ est un réel alors λf est élément de S .
- c. Démontrer que si f est élément de S , alors f' est élément de S .

2. Existence de solutions particulières

Démontrer que la fonction exponentielle est élément de S .

Qu'en est-il des fonctions $x \mapsto x e^x$ et $x \mapsto x^2 e^x$?

3. Résolution de (E)

- a. Soit g un élément quelconque de S . On définit alors une fonction f par :

$$f(x) = e^{-x} g(x)$$

Démontrer que l'on a :

$$f''' = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

- b. En déduire l'ensemble S .

Exercice 1 *Du double au triple*

Par hypothèse, on a :

$$y' = ay$$

Où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme :

$$y(t) = C e^{at}$$

Où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle)

Comme la grandeur double tous les dix ans, on a :

$$y(t + 10) = 2y(t)$$

$$C e^{a(t+10)} = 2 C e^{at}$$

En simplifiant par $C e^{at}$:

$$e^{10a} = 2$$

D'où :

$$a = \frac{\ln 2}{10}$$

On a donc :

$$y(t) = C e^{\frac{\ln 2}{10}t} = C 2^{\frac{t}{10}}$$

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a :

$$y(t + T) = 3y(t)$$

$$C e^{a(t+T)} = 3 C e^{at}$$

$$e^{aT} = 3$$

$$T = \frac{\ln 3}{a} = \frac{10 \ln 3}{\ln 2} \simeq 15,85 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jours près) pour que cette quantité triple.

Exercice 2 *Loi de refroidissement de Newton*

Notons $f(t)$ la température du corps à l'instant t (en minutes).

Selon la loi de refroidissement de Newton, on a :

$$f'(t) = a(25 - f(t))$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}_+$, de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(t) = C e^{-at} + 25$$

À l'instant $t = 0$, le corps est à une température de 100°C :

$$f(0) = 100$$

$$C + 25 = 100$$

$$C = 75$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 75 e^{-at} + 25$$

On sait que 15 minutes plus tard, le corps est à 70°C , ce qui permet de calculer a :

$$f(15) = 70$$

$$75 e^{-15a} + 25 = 70$$

$$e^{-15a} = \frac{3}{5}$$

$$-15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 3 - \ln 5$$

$$a = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \simeq 0,034 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Déterminons maintenant le temps t à partir duquel le corps se trouve à une température de 40°C .

On résout l'équation :

$$f(t) = 40$$

$$75e^{-at} + 25 = 40$$

$$e^{-at} = \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{\ln 5}{a} = 15 \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 47,26 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

Il faut attendre 47 minutes (et 16 secondes, à la seconde près) que le corps atteigne la température de 40°C .

Exercice 3 *Dissolution d'une substance*

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = a(20 - f(t))$$

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = C e^{-at} + 20$$

À l'instant initial, il n'y a pas encore de quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$C + 20 = 0$$

$$C = -20$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$-20e^{-5a} + 20 = 10$$

$$e^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\ln 2}{5} \simeq 0,14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = 20 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{5} t} \right) = 20 \left(1 - 2^{-\frac{t}{5}} \right)$$

Exercice 4 *Taux d'alcoolémie*

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (les fonctions f et l'exponentielle le sont) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = f'(t) e^t + f(t) e^t = (f'(t) + f(t)) e^t$$

Et comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = a$$

D'où :

$$g(t) = at + b$$

La fonction g est bien affine (sur $\mathbb{R}_+$).

2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = (at + b) e^{-t}$$

Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$:

$$b e^{-t} = 0$$

$$b = 0$$

D'où :

$$f(t) = at e^{-t}$$

3. a. Étudions les variations de f . Comme f est solution de (E), on a :

$$f'(t) = 5e^{-t} - f(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5e^{-t}(1 - t)$$

D'où :

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$$

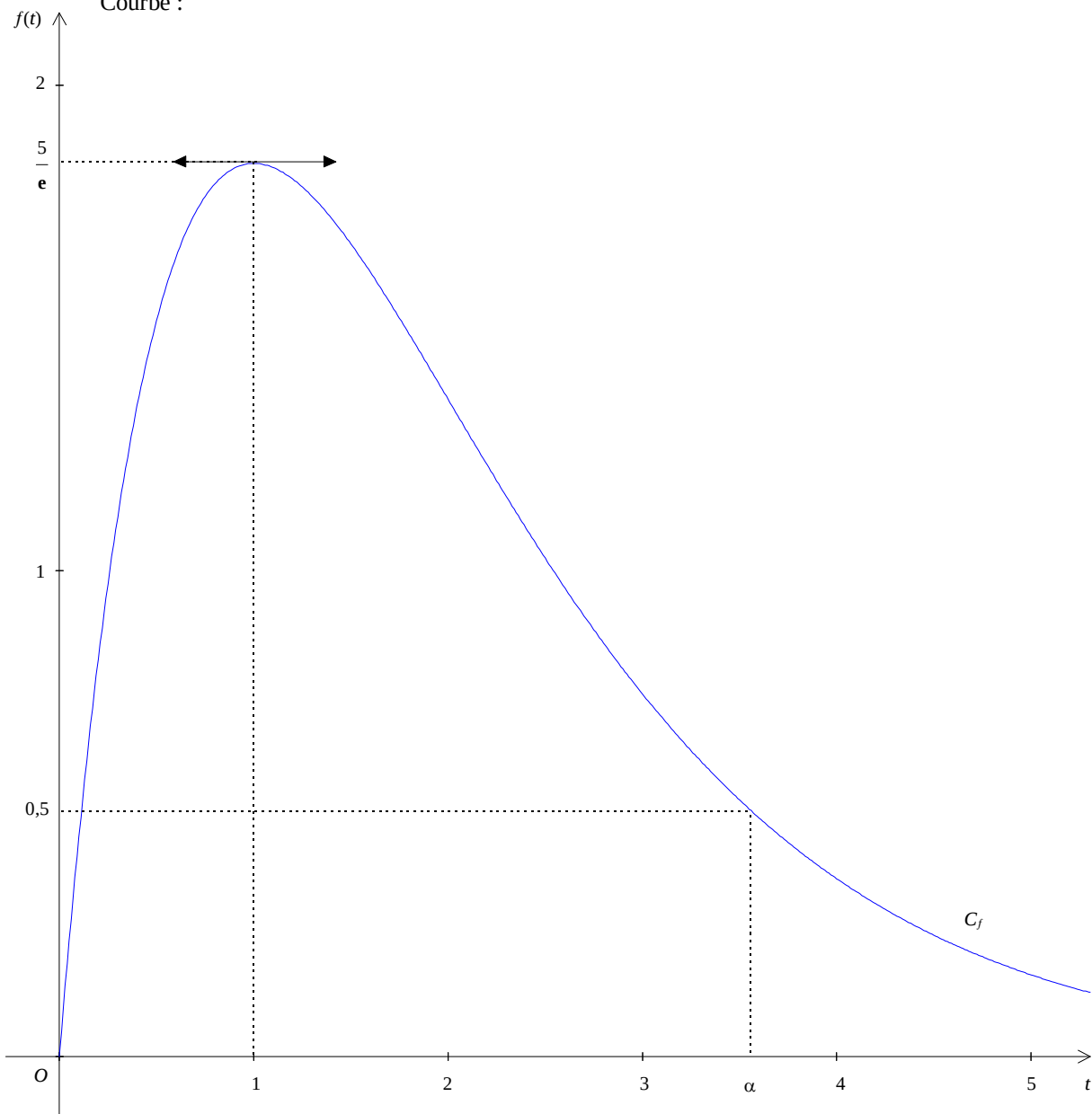
La fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Elle admet donc un maximum en 1 et :

$$f(1) = \frac{5}{e} \simeq 1,84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Le taux d'alcoolémie maximal est de $1,84 \text{ gL}^{-1}$ atteint au bout d'une heure.

Courbe :



b. Nous devons résoudre l'inéquation : $f(t) \leq 0,5$

$$5te^{-t} \leq 0,5$$

$$te^{-t} \leq 0,1$$

Ceci n'est pas possible formellement (inéquation transcendante).

Cependant, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$f(1) = \frac{5}{e} > 0,5 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5te^{-t} = 0$$

Le théorème de bijection assure qu'il existe un unique réel α de $[1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$.

Le graphique permet de conjecturer : $\alpha \in]3 ; 4[$

Ce qui peut se contrôler à la calculatrice :

$$f(3) \simeq 0,75 (> 0,5) \text{ et } f(4) \simeq 0,37 (< 0,5)$$

On a donc bien : $\alpha \in]3 ; 4[$

Il faudra attendre 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...

Exercice 5 *Modèle de Verhulst - Loi logistique continue*

1. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car f l'est) et on a :

$$z' = -\frac{f'}{f^2} = \frac{af(f-1)}{f^2} = a - \frac{a}{f} = -az + a$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = C e^{-at} + 1$$

La condition initiale $z(0) = 10$ donne : $C + 1 = 10$

$$C = 9$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}$$

2. On a donc :

$$f(15) = 0,19 = \frac{19}{100}$$

$$\frac{1}{9e^{-15a} + 1} = \frac{19}{100}$$

$$9e^{-15a} + 1 = \frac{100}{19}$$

$$e^{-15a} = \frac{9}{19}$$

$$a = \frac{\ln 19 - \ln 9}{15} \simeq 0,05 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

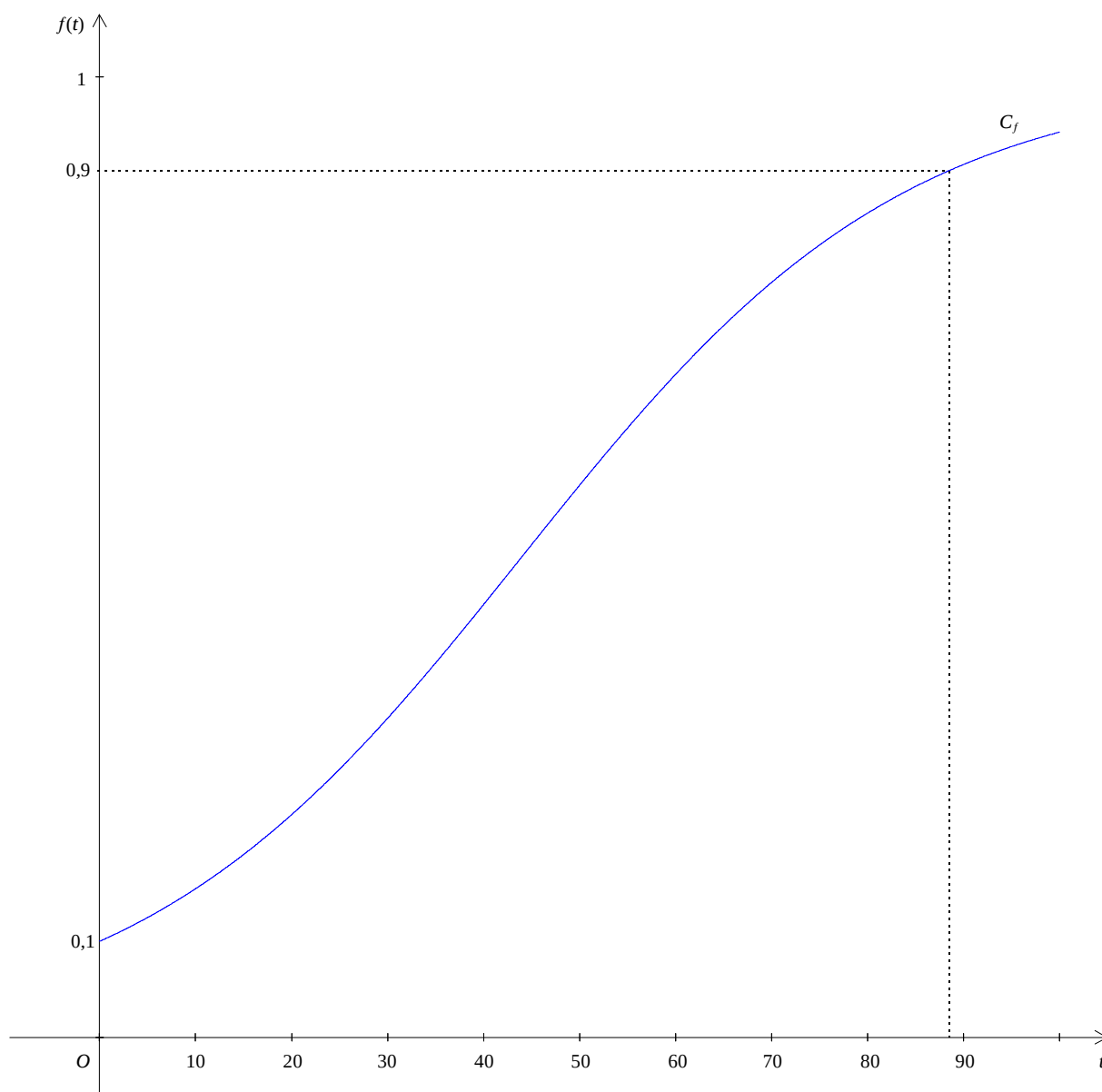
3. Comme $a > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0$ d'où : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$

Toujours parce que $a > 0$ et aussi car $0 < f < 1$, on a :

$$f' = af(1-f) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. Représentation graphique de la fonction f :



5. On résout l'inéquation :

$$f(t) \geq 0,9$$

$$\frac{1}{9e^{-at} + 1} \geq \frac{9}{10}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$9e^{-at} + 1 \leq \frac{10}{9}$$

$$e^{-at} \leq \frac{1}{81}$$

Par croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$:

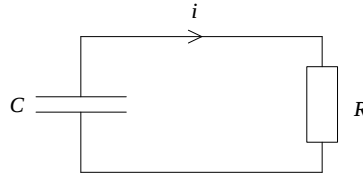
$$-at \leq -\ln 81$$

$$t \geq \frac{\ln 81}{a}$$

La calculatrice donne : $\frac{\ln 81}{a} \simeq 88,21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$

Il faut attendre 89 jours (au jour près par excès) pour que la plante dépasse les 90 cm de haut.

Exercice 6 Décharge d'un condensateur



D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_R = 0$

(u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance)

Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t .

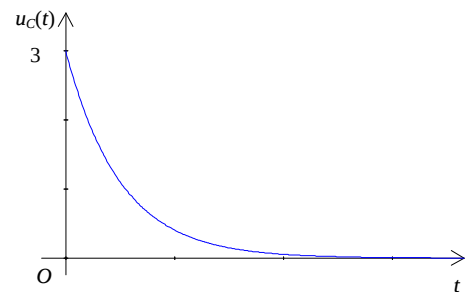
On sait que : $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ et $u_R(t) = R i(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$

D'où : $u'_C(t) = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{RC} u_R(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t)$

On en déduit : $u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$ ($K \in \mathbb{R}$)

La condition initiale $u_C(0) = 3$ donne : $K = 3$

D'où : $u_C(t) = 3 e^{-\frac{t}{RC}}$



Exercice 7 Vitesse d'un parachutiste

1. D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

En projetant les vecteurs sur un axe vertical, il vient :

$$mg - \frac{mgv^2}{25} = mv'$$

On s'aperçoit que le problème est indépendant de la masse m du parachutiste avec son équipement.

$$v' = g \left(1 - \frac{v^2}{25} \right) = \frac{g}{25} (25 - v^2)$$

La fonction v est donc bien solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle :

$$(E) : v' = g \left(1 - \frac{v^2}{25} \right)$$

2. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car v l'est) et on a :

$$z' = -\frac{v'}{(v-5)^2} = \frac{g}{25} \frac{(v^2 - 25)}{(v-5)^2} = \frac{g}{25} \frac{v+5}{v-5} = \frac{gz(v+5)}{25}$$

Or,

$$v = \frac{1}{z} + 5$$

$$v + 5 = \frac{1}{z} + 10$$

D'où :

$$z' = \frac{gz\left(\frac{1}{z} + 10\right)}{25} = \frac{g}{25}(10z + 1)$$

On en déduit, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = C e^{\frac{2gt}{5}} - \frac{1}{10}$$

La condition initiale $z(0) = \frac{1}{50}$ donne : $C - \frac{1}{10} = \frac{1}{50}$

$$C = \frac{3}{25}$$

3. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{3}{25} e^{\frac{2gt}{5}} - \frac{1}{10}} + 5$$

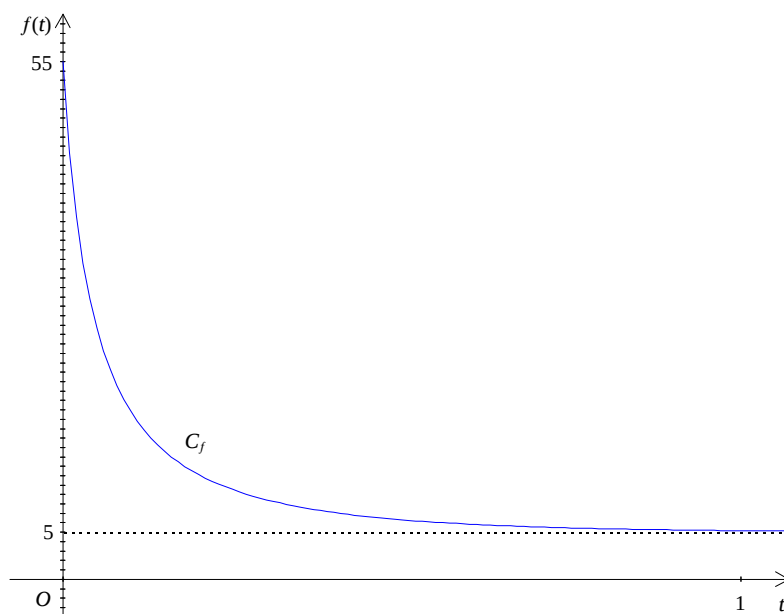
Comme $g > 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{2gt}{5}} = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 5$$

La vitesse du parachutiste se stabilise rapidement vers 5 ms^{-1} .



Exercice 8 Équation de Bernoulli⁽¹⁾

1. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car y l'est) et :

$$z' = (1-n)y' y^{-n} = (1-n)(ay + by^n) y^{-n} = (1-n)(az + b)$$

D'où, pour tout réel x :

$$z(x) = C e^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}$$

2. Comme on a posé $z = y^{1-n}$, on a :

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \left(C e^{(1-n)ax} - \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Lorsque $n = 0$, on récupère l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec ses solutions :

$$y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exercice 9 Une équation du second ordre sans terme d'ordre nul

Soient a et b deux nombres réels. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' = ay' + b$$

1. Comme la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z' = y''$.

On a donc :

$$z' = az + b$$

On en déduit que pour tout réel x :

$$z(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

D'où :

$$y(x) = \frac{C}{a} e^{ax} - \frac{b}{a} x + D \text{ où } D \in \mathbb{R}$$

2. La condition $y'(0) = 0$ s'écrit encore $z(0) = 0$ et donne :

$$C = \frac{b}{a}$$

La constante C est déterminée de manière unique.

La condition $y(0) = 0$ donne :

$$\frac{C}{a} + D = 0$$

$$D = -\frac{C}{a} = -\frac{b}{a^2}$$

La constante D est déterminée de manière unique.

L'unique solution de (E) vérifiant $y'(0) = y(0) = 0$ est définie par :

$$y(x) = \frac{b}{a^2} e^{ax} - \frac{b}{a} x - \frac{b}{a^2}$$

⁽¹⁾ La forme générale de l'équation de Bernoulli est $y' = P(x)y + Q(x)y^n$ où P et Q sont des polynômes (ici P et Q sont des constantes).

Exercice 10 Avec second membre variable

1. Les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation sans second membre associé :

$$(E_0) : y' - 3y = 0$$

sont de la forme :

$$y(x) = C e^{3x}$$

2. La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :

$$p'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

La fonction p est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x :

$$-a \sin x + b \cos x - 3a \cos x - 3b \sin x = \sin x$$

$$(-a - 3b) \sin x + (b - 3a) \cos x = \sin x$$

$$\begin{cases} -a - 3b = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{10} \quad \text{et} \quad b = -\frac{3}{10}$$

$$p(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

On obtient les deux relations du système ci-contre, en remplaçant x par $\pi/2$ puis par 0.

3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$f' - 3f = \sin x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$f' - 3f = p' - 3p \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$(f - p)' - 3(f - p) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$f - p$ solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$

4. Poursuivons nos équivalences : $f(x) - p(x) = C e^{3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = p(x) + C e^{3x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x + C e^{3x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 Désintégration des noyaux radioactifs - Temps caractéristique - Datation au carbone 14

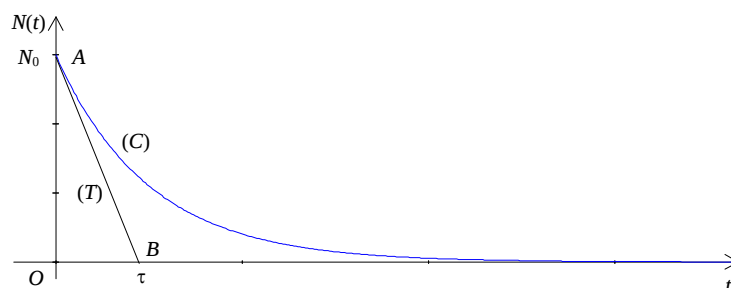
1. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

2. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- a. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse $t = 0$.



Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) est d'une part :

$$N'(0) = -\frac{N_0}{\tau}$$

$$(\text{En effet, pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \text{ on a } N'(t) = -\frac{N_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}})$$

D'autre part, ce coefficient directeur est celui de la droite (AB) où A et B désignent respectivement les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{N_0}{x_B}$$

On peut aussi déterminer l'équation de la tangente à (C) en 0.

On en déduit :

$$\tau = x_B$$

Le temps caractéristique est bien l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe (C) de la fonction N au point $t = 0$ et l'axe des abscisses.

- b. On détermine $\tau_{1/2}$ en résolvant l'équation : $N(t) = \frac{1}{2} N_0$

$$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

On a donc :

$$\tau_{1/2} = \tau \ln 2$$

3. Il suffit d'exprimer t en fonction de la proportion $\frac{N(t)}{N_0}$:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\frac{t}{\tau} = -\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

$$t = -\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

Pour le carbone 14, on a :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{5730}{\ln 2}$$

D'où :

$$t = -\frac{5730}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

La calculatrice donne alors :

Pourcentage de la quantité initiale de Carbone 14	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
Age (post-mortem) du tissu (en milliers d'années)	0,42	0,81	1,34	1,84	2,38	2,95	3,56	4,22	4,94	5,73	6,60	7,57	8,68	9,95	11,4	13,3	15,7	19,0	24,8

Par exemple, un tissu ne comprenant plus que 70% de carbone 14 date d'environ 2948 années.

Exercice 12 Une équation différentielle d'ordre 3

$$(E) : y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

On note S l'ensemble des fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Stabilité de S .

- a. Si f et g sont deux éléments de S , alors on a sur $\mathbb{R}$:

$$f''' - 3f'' + 3f' - f = 0$$

$$g''' - 3g'' + 3g' - g = 0$$

En additionnant : $(f + g)''' - 3(f + g)'' + 3(f + g)' - (f + g) = 0$

Donc : $f + g \in S$

- b. Si f est élément de S et si λ est un réel alors on a sur $\mathbb{R}$:

$$f''' - 3f'' + 3f' - f = 0$$

En multipliant par λ : $(\lambda f)''' - 3(\lambda f)'' + 3(\lambda f)' - \lambda f = 0$

Donc : $\lambda f \in S$

- c. Si f est élément de S , alors on a sur $\mathbb{R}$:

$$f''' - 3f'' + 3f' - f = 0 \quad (*)$$

En particulier, on a : $f''' = 3f'' - 3f' + f$

Comme les fonctions f'' , f' et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (puisque f est par hypothèse solution de E , elle est au moins trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$), la fonction f''' l'est donc aussi (en poursuivant ce raisonnement par récurrence, on pourrait même montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$). On peut donc dériver une fois l'égalité $(*)$ pour obtenir sur $\mathbb{R}$:

$$(f')''' - 3(f')'' + 3(f')' - f' = 0$$

Donc : $f' \in S$

2. Existence de solutions particulières

Comme la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée, on a pour tout réel x :

$$\exp'''(x) - 3\exp''(x) + 3\exp'(x) - \exp(x) = (1 - 3 + 3 - 1)\exp x = 0$$

D'où : $\exp \in S$

Notons, pour tout réel x : $f(x) = x e^x$

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit) et :

$$f'(x) = (x + 1) e^x$$

$$f''(x) = (x + 2) e^x$$

$$f'''(x) = (x + 3) e^x$$

On a alors :

$$f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = [(x + 3) - 3(x + 2) + 3(x + 1) - x] e^x = 0$$

Donc la fonction $x \mapsto x e^x$ est aussi élément de S .

De même, notons, pour tout réel x : $g(x) = x^2 e^x$

La fonction g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit) et :

$$g'(x) = (x^2 + 2x) e^x$$

$$g''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

$$g'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

On a alors :

$$g'''(x) - 3g''(x) + 3g'(x) - g(x) = \left[(x^2 + 6x + 6) - 3(x^2 + 4x + 2) + 3(x^2 + 2x) - x^2 \right] e^x = 0$$

Donc la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est aussi élément de S .

3. Résolution de (E)

- a. Comme g est élément de S , elle est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en va donc de même de la fonction f (par produit) et pour tout réel x , on obtient :

$$f'(x) = (-e^{-x})g(x) + e^{-x}g'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x))$$

$$f''(x) = (-e^{-x})(g'(x) - g(x)) + e^{-x}(g''(x) - g'(x)) = e^{-x}(g''(x) - 2g'(x) + g(x))$$

$$f'''(x) = (-e^{-x})(g''(x) - 2g'(x) + g(x)) + e^{-x}(g'''(x) - 2g''(x) + g'(x)) = e^{-x}(g'''(x) - 3g''(x) + 3g'(x) - g(x))$$

Et comme $g \in S$, on en déduit : $f''' = 0$ sur $\mathbb{R}$

- b. On en déduit qu'il existe des constantes réelles A , B et C telles que pour tout réel x :

$$f''(x) = A$$

$$f'(x) = Ax + B$$

$$f(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$$

Et en posant $a = \frac{A}{2}$, $b = B$ et $c = C$: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Or, pour tout réel x :

$$g(x) = f(x) e^x$$

Les solutions g de (E) sont donc nécessairement du type :

$$g(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$$

L'ensemble S est donc constitué de fonctions du type $x \mapsto (ax^2 + bx + c) e^x$.

Mais nous savons que les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x e^x$ et $x \mapsto x^2 e^x$ sont dans S , donc par stabilité de

S , toutes les fonctions $x \mapsto (ax^2 + bx + c) e^x$ sont solutions de (E) et ce sont les seules :

$$S = \{ x \mapsto (ax^2 + bx + c) e^x \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \}$$