

Cours et exercices sur les équations différentielles

Classe : Terminales Sciences Exactes – T.S.E 2014-2015

Chapitre : Équations différentielles

Durée : 6 heures

Domaine : S.M.T. « Sciences, Mathématiques et Technologiques »

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres, cahier, Chiffon, craie, règle, équerre...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Contenu : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Séquence1 : Généralités

durée : 2 heures

Activité1 :

Soient f une fonction 3 fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Trouves dans les cas suivant la fonction $f(x)=y$ vérifiant :

$$y' = 2x + 1 ; \quad x y' - 1 = 0; \quad y'' = 1.$$

Consignes :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Durée 10 minutes

Synthèse:

1) - Définitions 1 : On appelle équation différentielle toute relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives : $y'; y''; y'''; \dots; y^n$. On a $y=f(x)$ est la fonction inconnue.

NB : on parle d'équations différentielles d'ordre 1; 2; 3; ... ou d'ordre n selon le cas :

Exemples :

- $y' + y - x = 0$ est une équation différentielle du 1^{er} ordre ou d'ordre 1.
- $2f'' + f = 0$ est une équation différentielle du 2^{ème} ordre.
- $y'' + 2y' - y - 2x + 5 = 0$ est une équation différentielle du 2^{ème} ordre.
- $Y''' - x^2 = 0$ est une équation différentielle du 3^{ème} ordre.

2) - Solutions d'une équation différentielle :

Définition 2 : On appelle solution d'une équation différentielle (E) un couple (f, I) où f est une fonction et I un intervalle tels que f vérifie (E) sur I .

☞ Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I , c'est trouver toutes les fonctions solutions sur I . (Ce n'est pas toujours évident). À notre niveau, on aura presque toujours $I = \mathbb{R}$.

Equation différentielle de type $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$:

Cours et exercices sur les équations différentielles

1. Equation différentielle de type $y' = f(x)$:

Soit F une primitive de f sur un intervalle I .

$$y' = f(x) \implies y = \int f(x) dx \implies y = F(x) + c ; \quad c \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble solution est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + c ; \quad c \in \mathbb{R}$. **(la solution générale SG)**

Activité 1 : Résous les équations différentielles :

$$y' = 6x + 2; \quad y' = \frac{1}{x}; \quad y' = \frac{-\sin x}{\cos x}; \quad y' \sin x - \cos x = 0; \quad ; \quad x^3 y' + x^2 + 1 = 0;$$

2. Equation différentielle de type $y'' = g(x)$:

Soient G_1 une primitive de g sur I : $y' = G_1(x) + c_1; \quad c_1 \in \mathbb{R}$.

Soient G_2 une primitive de G_1 sur I : $y = G_2(x) + c_1 x + c_2; \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

SG : $x \mapsto G_2(x) + c_1 x + c_2; \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

Activité 2 : Résous les équations différentielles :

$$y'' = 1; \quad 1 + 6x^2 + y'' = 0; \quad \cos 2x + 4y'' = 0; \quad y'' = 1 + \tan^2 x ; \quad 2y'' + e^x - e^{-2x} = 0 \quad \text{et} \quad y'' = \frac{1}{x}.$$

I. Équations différentielles linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants sans second membre :

1) - Définition 3 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $(E_1): a y' + by = 0 . \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}.$

2) - Solutions de $(E_1): a y' + by = 0$:

📖 Si $y = 0$ alors SG : $y = c ; \quad c \in \mathbb{R}.$

📖 Si $y \neq 0$: $a y' + by = 0 \implies \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \implies \ln|y| = -\frac{b}{a} x + c \implies |y| = e^c e^{-\frac{b}{a} x} \implies y = k e^{-\frac{b}{a} x}; k \in \mathbb{R}^*$

Théorème 1 : la solution générale **(S. G)** sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est : $y = k e^{-\frac{b}{a} x}; k \in \mathbb{R}^*.$

Activité 3 : Résous les équations différentielles :

$$y' - 2y = 0; \quad 2y' = y; \quad 3y - 2y' = 0; \quad -2y' = \sqrt{2}y \quad \text{et} \quad y' - (\ln 2)y = 0.$$

Théorème 2 : (E_1) admet une solution unique f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition $f(x_0) = y_0$.

Activité 4 :

I. $y' - y = 0; \quad x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 1.$

II. Soit $(E): y' - 3y = 0.$

1) Résous (E) .

2) Détermine la solution de (E) dont la courbe passe par le point $I(0; 2)$.

3) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point J d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur -2.

4) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point P d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite $(D): 2y + x = 0$.

III. Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants sans 2^{ème} membre :

1) Définition 4 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

Cours et exercices sur les équations différentielles

$$(E_2): a y'' + b y' + c y = 0. \quad a \in \mathbb{R}^*; \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c \in \mathbb{R}$$

2) Résolution de (E_2) :

a) **Définition 5 :** On appelle équation caractéristique associée à (E_2) l'équation d'inconnue r réel ou complexe :

$$(E_c): \quad ar^2 + br + c = 0.$$

b) Théorème 3 (admis) :

Si l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet	Alors les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
2 racines réelles distinctes : r_1 et r_2 ; $(\Delta > 0)$	$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
1 racine double réelle : r_0 ; $(\Delta = 0)$	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
2 racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$; $(\Delta < 0)$	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

c) Théorème 4 : (E_2) admet une solution unique f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition $f(x_0) = y_0$ et

$$f'(x_0) = y'_0 \quad (\text{La condition de Cauchy}).$$

Activité 5:

1) Résous dans $\mathbb{R}$

$$(E_1): y'' - 3y' - 4y = 0; \quad (E_2): y'' - 4y' + 4y = 0; \quad (E_3): y'' + y' + y = 0; \quad (E_4): 2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0;$$

$$(E_5): \frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0; \quad (E_6): 2y'' + 3y' = 0; \quad (E_7): 3y'' - y = 0; \quad (E_8): y'' + y = 0$$

2) Détermine pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

$$(E_1): y'' + y' - 6y = 0 \quad \text{Sachant que } f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = -8$$

$$(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0 \quad \text{Sachant que } f(0) = 4 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

$$(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0 \quad \text{Sachant que } f(0) = 3 \quad \text{et} \quad f'(0) = 5.$$

$$(E_4): 2y'' + 5y' + 3y = 0 \quad \text{Sachant que } f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = 3.$$

$$(E_5): 9y'' + 64y = 0 \quad \text{Sachant que } f(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad f'(2\pi) = \frac{1}{3}.$$

$$(E_6): y'' + \pi^2 y = 0 \quad \text{Sachant que } y(0) = y'(0) = 0$$

IV. Équations différentielles avec second membre

A. **1^{er} ordre :** On considère l'équation différentielle $(E): y' + y = x^2 + x$.

1) Détermine les réels a , b et c pour que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) .

2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de

Cours et exercices sur les équations différentielles

l'équation différentielle : $(E_0): h' + h = 0$. (l'équation homogène associée à (E))

3) Résous l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E) .

4) Détermine la solution particulière φ de (E) telle que la courbe (C) de φ passe par le point $A(0; -1)$.

B. 2^{er} ordre : On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = \cos x$

1) Détermine les réels λ et μ pour que la fonction $g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ soit solution de (E) .

2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$. (l'équation homogène associée à (E))

3) Résoudre l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E) .

Exercice :

A. On considère l'équation différentielle $(E_1): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -3x + 4$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

4) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de (E_1) .

5) Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2): h'' - 2h' + h = 0$.

6) Résoudre l'équation différentielle (E_2) et en déduire les solutions de (E_1) .

7) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = -1$ et $\varphi'(0) = 0$

B. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (2x + 1)e^x - (3x + 2)$.

1) a) Déterminer les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que $(\Delta): y = -3x - 2$ est A.O à (C) de P .

c) Etudier la position relative de (Δ) par rapport à (C) .

2) a) Etudier les variations de P .

b) Tracer (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

3) On note (D) la partie de plan limité par (C) ; (Δ) et les droites $x = \lambda$ et $x = -\frac{1}{2}$ où $\lambda < -\frac{1}{2}$.

a) Mettre en évidence la partie (D) sur le graphique.

b) Calculer $\int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} -(2x + 1)e^x dx$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

c) Exprimer en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de (D) en cm^2 .

d) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.