

Equations différentielles

Exercice 1 :

Vérifiez que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

- 1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$; $y'' - 4y = 0$
- 2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $y'' + 2y' + y = 0$
- 3) $f(x) = x \sin x$; $y'' + y = 2 \cos x$
- 4) $f(x) = e^{-x} \sin x$; $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exercice 2:

Résolvez les équations différentielles proposées.

- 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - y = 0$;
- 3) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 4) $2y'' - y' - y = 0$;
- 5) $y'' + 2y' + y = 0$; 6) $9y'' + 6y' + y = 0$;
- 7) $4y'' + 12y' + 9y = 0$; 8) $y'' + y = 0$;
- 9) $y'' + y' + y = 0$; 10) $4y'' + 9y = 0$; 11) $y'' + 3y' + 4y = 0$.

Exercice 3 :

Déterminez la solution f de l'équation différentielle donnée, vérifiez les conditions données.

- 1) $y'' - 2y' + y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
- 2) $y'' - y' - y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- 3) $y'' + 4y = 0$; $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$
- 4) $y'' + y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- 5) $y'' - 4y' - 5y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = -6$
- 6) $y'' - 4y = 0$; $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$
- 7) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

Exercice 4 :

Etudiez les variations et tracez dans un plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative (C) de la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la courbe des conditions (S) données.

- 1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
- 2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).
- 3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.
- 4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- 5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées (ln 2 ; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur - 4

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5 : (4 pts)

On appelle (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

- 1- Déterminer les réels r tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{rx}$, soit solution de (E).
- 2- Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = Ae^x + Be^{-x}$, où A et B sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
- 3- Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

Exercice 6 :

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = -25 \cdot 10^{-8} N(t)$ et $N(0) = N_0$ où t est exprimé en années.

- 1- Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .
- 2- Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice 7 :

Dans une culture de microbes qui se développe, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant. Sachant qu'il y a 10^5 microbes au bout de 2 heures et 5×10^5 microbes au bout de 6 heures, combien y avait-il initialement de microbes dans cette culture ?

Exercice 8 :

Un condensateur de capacité C tel que $C = 200 \mu F$ se décharge à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 1 k\Omega$.

On admet qu'à tout instant t , la charge q du condensateur vérifie l'équation différentielle : $q' + \frac{1}{RC}q = 0$, où R est exprimé en ohm(Ω) et C en Farad(F).

- 1- Donner l'expression de $q(t)$ sachant que la charge initiale du condensateur est q_0
- 2- On considère que le condensateur est déchargé lorsque la charge est égale à 1 % de la charge initiale.
 - a- Calculer le temps mis par le condensateur pour se décharger.
Quelle valeur doit prendre la résistance pour que le temps de décharge soit de 10^{-3} seconde ?

Exercice 9 :

A l'instant $t = 0$ (t est exprimée en heure), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit

instantanément

dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées.

On admet que le processus d'élimination peut être présenté mathématiquement par l'équation

différentielle : $Q'(t) = -\beta Q(t)$ où β est un nombre réel qui sera déterminé expérimentalement.

1- Montre qu'on a $Q(t) = 2,5e^{-\beta t}$

2- Calcule la valeur de β sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

Exercice 10 : (Problème A-du Bac TSE 2016) [10 points]

A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqure intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta.Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°/ Montre qu'on a $Q(t) = 2,5e^{-\beta t}$. **(1pt)**

2°/ Calcule la valeur de β , sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près. **(1,5pt)**

3°/ Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan P. **(1,5pt)**

4°/ Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Exercice 11 : [4,5 points]

On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t dans un fragment d'os. On admet que Q vérifie à tout instant t , $Q'(t) = -\lambda Q(t)$

λ est appelé constante radioactive du carbone 14.

1- Soit Q_0 la quantité de carbone 14 à l'instant $t=0$.

Exprimer $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0

2- On appelle Période ou demi vie d'un élément radioactif la durée t au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés.

Sachant que $\lambda = 1,2444 \times 10^{-4}$ et que t est évalué en années, déterminer la période du carbone 14.

3- Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments.

Par M. TRAORE Modibo