

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2025 - 2026

Les équations différentielles

Exercice 01

Résous les équations différentielles :

- 1) $y' = 6x + 2$; 2) $y' = \frac{1}{x}$; 3) $y' \cos x - \sin x = 0$; 4) $xy' - \ln x = 0$ 5) $x^3 y' + x^2 + 1 = 0$;
6) $1 + 6x^2 + y'' = 0$; 6) $y'' = e^{3x}$; 8) $xy'' - 1 = 0$;

Exercice 02

- I. Trouve la solution particulière de $y' - y = 0$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.
II. Soit $(E): y' - 3y = 0$.
1) Résous (E) .
2) Détermine la solution de (E) dont la courbe passe par le point $I(0; 2)$.
3) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point J d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur -2 .
4) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point P d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite $(D): 2y + x = 0$.

Exercice 03

- 1) Résous dans $\mathbb{R}$
 $(E_1): y'' - 3y' - 4y = 0$; $(E_2): y'' - 4y' + 4y = 0$; $(E_3): y'' + y' + y = 0$;
2) Détermine pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :
 $(E_1): y'' + y' - 6y = 0$ Sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$
 $(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0$ Sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.
 $(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0$ Sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.
 $(E_4): 9y'' + 64y = 0$ Sachant que $f(\pi) = 0$ et $f'(2\pi) = \frac{1}{3}$.

Exercice 04

Soit l'équation différentielle $(E): y' + 2y = (x - 3)e^{-x}$.

- 1°) Résous $(E_0): y' + 2y = 0$
2°) Trouve les réels a et b pour que $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E) .
3°) Démontre que h est solution de (E) implique que $(h - f)$ est solution de (E_0)
4°) Déduis en toutes les solutions de (E) et trouve celle qui passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

Exercice 05 : Corrigé dans DONI Maths TSE

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + 5y = 0$.
2) En déduire la fonction f , solution de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
3) On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.
a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F(x)$.
b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

Exercice 06 : Corrigé dans DONI Maths TSE

1. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$ (1).

2. On considère sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

- Détermine les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit solution de l'équation (2).
- Soit h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montre que la fonction f telle que $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de (2).
- Détermine parmi les solutions au 2) b) celle qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

Exercice 07 : Composition RG 2016/2017

On considère l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- Vérifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ est solution de (E).
- Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y' + 2y = 0$
- Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

Exercice 08 : Corrigé dans DONI Maths TSE

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

- Détermine la solution de l'équation différentielle (E'): $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0
- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x}g(x)$.
 - Calcule $g(0)$.
 - Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.
 - Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
 - En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice 09

- Résoudre dans l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y = 0$
- Soit l'équation de différentielle $(E_2) : y'' + \frac{1}{x^4}y = 0$
 - Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ telles que $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$. Montre que f est une solution de (E_1) si et seulement si g est une solution de (E_2) .
 - En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) .
- Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Vérifier que h est une solution de (E_2) .
 - En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Exercice 10

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases} \quad \text{où } y \text{ et } z \text{ désigne deux fonctions inconnues de variable } x.$$

1. Forme une équation différentielle (E) du second ordre à laquelle satisfait $y(x)$.
2. Intègre l'équation (E) et déduis-en la solution générale du système.
3. Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $z = -1$ pour $x = 0$.

Exercice 11

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E): y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$$

$$(E'): y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0. \text{ Dans laquelle } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E').
2. Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = x^2 e^x$ est une solution de (E).
3. Dans cette partie, on donne $m = 2$.
 - a) Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a.1) Démontrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E').
 - a.2) Démontrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E).
 - b) Déduis de 1. La résolution de (E') ; puis résoudre (E).
 - c) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté au repère orthonormé passe par le point $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \rightarrow 2(1 - 2x)e^{2x}$.
 - a) Sachant que g est une solution de (E), démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
 - b) Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme: $U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.
 - c) En déduire $G(x)$.

Exercice 12

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

- 1) Détermine les nombres réels a ; b ; c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- 2) Démontre qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): h'' - 3h' + 2h = 0$.
- 3) Intègre l'équation différentielle (E_0) . Déduis en les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
- 4) Détermine la solution particulière φ de (E) telle que : $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Partie B :

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^x + 4x^2 - 4.$$

- 1) a) Calcule $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^x + 1)(e^x - 1)$. Etudie les variations de la fonction φ' . Déduis en le signe de $\varphi'(x)$ et le sens de variation de φ .
 - b) Détermine les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Dresse le tableau des variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4$$

3) On désigne respectivement par (C_φ) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions φ et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a) Montre que pour tout réel, $\varphi(x) - g(x) = -4e^x(e^x - 2)$

b) Déduis en la position relative des courbes (C_φ) et (C_g) .

c) Détermine la limite de $\varphi(x) - g(x)$ en $-\infty$.

4) Trace les courbes (C_φ) et (C_g) dans le même repère.

5) Calcule l'intégrale $I = \int_{\alpha}^{\ln 2} (-4e^{2x} + 8e^x) dx$ où α est un réel tel que $(\alpha < \ln 2)$.

6) On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par les courbes (C_φ) ; (C_g) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \ln 2$.

a) Mets en évidence le domaine sur le graphique ;

b) Calcule en cm^2 l'aire $A(\alpha)$;

c) Calcule la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Exercice 13

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation :

$$N'(t) = -25 \times 10^{-8} N(t) \text{ et } N(0) = N_0 \text{ où } (t \text{ est exprimé en année}).$$

1) Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .

2) Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice 14 : Corrigé dans DONI Maths TSExp

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que : $y'(t) = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

2) Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.

Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

Exercice 15 : Corrigé dans DONI Maths TSE

A-// A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°/ Montre qu'on a $Q(t) = 2,5e^{-\beta t}$. (1pt)

2°/ Calcule la valeur de β , sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près. (1,5pt)

3°/ Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan P . (1,5pt)

4°/ Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ? On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près. (1pt)

Exercice 16: Corrigé dans DONI Maths TSE

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang, puis est éliminée par les reins.

Après étude, on constate que la quantité $S(t)$ contenue dans le sang à l'instant t (en heure) est solution de l'équation différentielle :

$$2y'' + 3y' + y = 0 \text{ et est telle que } S(0) = 0 \text{ et } S'(0) = \frac{1}{2}q$$

Où q est la quantité injectée. ($q > 0$)

1) Détermine $S(t)$. 1pt

2)a-/ Calcule la dérivée de S 0,5pt

b-/ vérifie que $S'(t)$ peut se mettre sous la forme : $S'(t) = qe^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$ 0,5pt

c-/En déduis le signe de $S'(t)$ sur $[0; +\infty[$ 0,5pt

3) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela, il faut que la quantité de substance contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs S_m et S_M ($S_m = 1,2$ seuil d'efficacité et $S_M = 2,6$ seuil de toxicité).

Utiliser le tableau des variations de S pour déterminer les valeurs que l'on peut donner à q pour ne pas dépasser S_M 0,5pt

4) On prend désormais $q = 10$.

a) Représente la fonction $S(t)$ et indique les seuils S_m et S_M . 0,75pt

b) Détermine graphiquement l'intervalle de temps durant lequel la substance est efficace. 0,5pt