

CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
 Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90

ANGLES ORIENTES

I- ANGLES ORIENTES DE DEMI-DROITES**1) Définition**

On appelle angle orienté de deux demi-droites, le couple formé par deux de demi-droite $([OA], [OB])$ de même origine O, noté $(\widehat{OA, OB})$.

Notation :

On notera par :

- $(\widehat{OA, OB})$: l'angle orienté formé par les demi-droites $[OA]$ et $[OB]$
 - $(\widehat{OA, OB})$: la mesure de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OA]$ et $[OB]$
- $\sin \widehat{OBC}$

2) Propriétés

Soient $[OA], [OB], [OC]$ et $[OD]$ quatre demi-droites de même origine O, on a :

$$P_1) \widehat{OA, OB} = -\widehat{OB, OA} [2\pi]$$

$$P_2) \widehat{OA, OB} + \widehat{OB, OC} = \widehat{OA, OC} [2\pi]$$

$$P_3) \widehat{OA, OA} = 0 [2\pi]$$

$$P_4) \widehat{OA, OB} = \widehat{OC, OD} [2\pi] \text{ par permutation des moyens } \widehat{OA, OC} = \widehat{OB, OD} [2\pi]$$

II- ANGLES ORIENTES DES DROITES**1) Définition**

Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan de vecteur directeur respectif $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle angle orienté de deux droites (D_1) et (D_2) noté $(\widehat{D_1, D_2})$, l'angle de leur vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Notation :

On notera par :

- $(\widehat{D_1, D_2})$: l'angle orienté formé par les droites (D_1) et (D_2)
- $(\widehat{D_1, D_2})$: la mesure de l'angle orienté formé par les droites (D_1) et (D_2) .

2) Propriétés

Pour toutes droites $(D_1), (D_2)$ et (D_3) du plan orienté,

$$P_1. \widehat{D_1, D_2} + \widehat{D_2, D_3} = \widehat{D_1, D_3} [\pi]$$

$$P_2. \widehat{D_1, D_2} = -\widehat{D_2, D_1} [\pi]$$

$$P_3. \widehat{D_1, D_1} = 0 [\pi]$$

a) Angles égaux

Deux angles orientés $(\widehat{D_1, D_2})$ et $(\widehat{D_3, D_4})$ sont dits égaux, lorsqu'ils ont le même sens d'orientation et de même mesure. On écrit : $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{D_3, D_4}) [\pi]$

III- ANGLES ORIENTES DES VECTEURS**1) Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

On appelle angle orienté de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ noté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Notation :

Dans cette ressource, on notera $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ l'angle orienté et $(\vec{u}, \vec{v})$ sa mesure.

2) Mesures principale d'un angle orienté

On appelle mesure principale d'un angle orienté tout nombre réel α tel que : $\alpha \in]-\pi, \pi]$

a) Mesures d'un angle orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

Si α est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ alors tout réel β de la forme $\beta = \alpha + 2k\pi$ (où k est un entier relatif) est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. On écrit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha + 2k\pi$ avec k un entier relatif, ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha[2\pi]$.

Remarque :

Toutes les mesures de l'angle nul sont de la forme $2k\pi$ et celle de l'angle plat sont de la forme $(2k+1)\pi$ où k est un entier relatif.

Exemples :

► $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$ sont des mesures de l'angle nul.

► $\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, 5\pi, \dots$ sont des mesures de l'angle plat.

b) Propriétés :

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs non nuls, on a :

$P_1.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = 0[2\pi]}$ (l'angle formé par deux vecteurs colinéaires de même sens)

$P_2.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \pi[2\pi]}$ (angle formé par deux vecteurs opposés)

$P_3.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi]}$ (Angles supplémentaires)

$P_4.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}[2\pi]}$ (Angles opposés)

$P_5.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})}[2\pi]}$ (Angles égaux)

$P_6.$ $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}[2\pi]}$ (Relation de Chasles)

$P_7.$ Si $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{w}, \vec{t})}[2\pi]}$ alors par permutation des extrêmes et des moyens on a :
 $\boxed{\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{t})}[2\pi]}$ et $\boxed{\widehat{(\vec{t}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{w}, \vec{u})}[2\pi]}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont les extrêmes, et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les moyens.

$P_8.$

$$\begin{array}{ll} \bullet \quad \boxed{\widehat{(-\vec{BA}, -\vec{CA})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}[2\pi]} & \bullet \quad \boxed{\widehat{(\vec{BA}, \vec{AC})} = \pi + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}[2\pi]} \\ \bullet \quad \boxed{\widehat{(\vec{BA}, \vec{CA})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}[2\pi]} & \bullet \quad \boxed{\widehat{(\vec{AB}, \vec{CA})} = \pi + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}[2\pi]} \end{array}$$

Théorème

Soit k et k' deux réels non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

a) Si k et k' sont de même signe, alors $\boxed{\widehat{(k\vec{u}, k'\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}[\pi]}$

b) Si k et k' sont de signe contraire, alors $\boxed{\widehat{(k\vec{u}, k'\vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi]}$

3) Angles particuliers**a) Angles alternes internes**

soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites du plan telles que : (D_1) parallèle à (D_2) , et (D_3) sécante à (D_1) et à (D_2) .

Les angles $(\widehat{D_1, D_3})$ et $(\widehat{D_2, D_3})$ sont deux angles alternes internes.

Propriétés

Deux angles alternes internes, sont de mesure égale.

b) Angles alternes externes

soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites du plan telles que : (D_1) parallèle à (D_2) , et (D_3) sécante à (D_1) et à (D_2) .

Les angles $(\widehat{D_3, D_1})$ et $(\widehat{D_3, D_2})$ sont deux angles alternes externes.

Propriétés

Deux angles alternes externes, sont de mesure égale.

c) Angles correspondants

soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites du plan telles que : (D_1) parallèle à (D_2) , et (D_3) sécante à (D_1) et à (D_2) .

Les angles $(\widehat{D_3, D_2})$ et $(\widehat{D_3, D_1})$ sont deux angles correspondants.

Propriétés

Deux angles correspondants, sont de mesure égale.

d) Angles à cotés perpendiculaires

Soient (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) quatre droites du plan telles que : (D_1) perpendiculaire à (D_2) et (D_3) perpendiculaire à (D_4) .

Les angles $(\widehat{D_1, D_3})$ et $(\widehat{D_2, D_4})$ sont deux angles à cotés perpendiculaires.

Propriétés

Deux angles à cotés perpendiculaire, sont de mesure égale.

e) Angles à cotés parallèles

Soient (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) quatre droites du plan telles que : (D_1) parallèle à (D_2) , (D_3) parallèle à (D_4) ; (D_1) sécante à (D_3) et à (D_4) et (D_2) sécante à (D_3) et à (D_4) .

Les angles $(\widehat{D_1, D_3})$ et $(\widehat{D_2, D_4})$ sont deux angles à cotés parallèles.

Propriétés

Deux angles à cotés parallèles, sont de mesure égale.

4) Angles au centre-angle inscrit

Angle inscrit : $(\widehat{MA, MB})$;

Angle au centre : $(\widehat{OA, OB})$;

Théorème :

Soient M, A et B trois points distincts d'un cercle de centre O.

Un angle au centre est égal au double de son angle inscrit interceptant le même arc, c'est-à-dire :

$$\boxed{\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]}$$

5) Angles tangentes-cordes

Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O, et (T) est tangente à ce cercle en A, alors on a : $\boxed{\overline{(MA, MB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]}$

Théorème :

Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O.

Si la droite (T) est tangente au cercle en A, alors on a : $\boxed{\overline{(MA, MB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]}$

6) Cercle capable

a) Construction du cercle capable

Pour construire le cercle capable, on trace :

- Le segment [AB] ;
 - La médiatrice du segment [AB] ;
 - Une droite (T) passant par A tel que $\overline{(T, AB)} = \alpha[\pi]$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ où $\alpha \in]-\pi; \pi[$
 - La perpendiculaire à (T) en A de telle sorte qu'elle rencontre la médiatrice du segment [AB] en un point O.
 - Enfin, on trace le cercle de centre O de corde [AB].
- Ce cercle est appelé cercle capable.

b) Ensemble des points M du plan tel que : $\overline{(MA, MB)} = \alpha[\pi]$

- Si $\alpha = 0$: $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = 0[\pi]$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privé des points A et B. On écrit $(AB) \setminus \{A; B\}$

- Si $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$: $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = \pm \frac{\pi}{2}[\pi]$

L'ensemble des points M est un demi-cercle de diamètre [AB].

- Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ où $\alpha \in]-\pi; \pi[$

L'ensemble des points M est le cercle capable des corde [AB] privé des points A et B.

c) Ensemble des points M du plan tel que : $\overline{(MA, MB)} = \alpha[2\pi]$

- Si $\alpha = 0$: $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = 0[2\pi]$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privé du segment [AB].

- Si $\alpha = \pi$: $\Rightarrow \overline{(MA, MB)} = \pi[2\pi]$

L'ensemble des points M est le segment [AB] privé des points A et B.

- Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$

L'ensemble des points M est un arc de cercle capable de corde [AB] d'angle α privé des points A et B.

III- POINTS COCYCLIQUES

Des points situés sur un même cercle sont dits cocycliques.

- Pour deux points A et B distincts, il passe une infinité de cercles.
- Pour trois points A, B et C distincts et non alignés, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Définition

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. On dit que les points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $\boxed{\overline{(AB, AC)} = \overline{(DB, DC)}[\pi]}$ ou $\boxed{\overline{(BA, BC)} = \overline{(DA, DC)}[\pi]}$

ou encore $\boxed{\overline{(CA, CB)} = \overline{(DA, DB)}[\pi]}$ etc.

2) Propriété

Si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan qui forment deux triangles rectangles de même hypoténuse, alors les points A, B, C, D sont cocycliques.

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1 :

Soit ABC un triangle quelconque, et H sont orthocentre.

1- Faire la figure.

2- Démontrer que $\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$

EXERCICE 2 :

Soit ABC un triangle de sommet M inscrit dans un cercle de centre O, (Δ) et (Δ') deux bissectrices respectives des angles $(\widehat{OA, OM})$ et $(\widehat{OM, OB})$.

1- Faire la figure.

2- Montrer que $\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]$

EXERCICE 3 :

Soit (C) un cercle de diamètre $[IC]$ et de centre O. Du point I, portant les droites (IA) et (IB) qui rencontrent (C) respectivement en A et B puis une droite (Δ) orthogonale à (IC) en D et en E.

1- Faire la figure.

2- Démontrer que les points A, B, E, D sont cocycliques.

EXERCICE 4 :

Soient (C) et (C') deux cercles sécantes en A et B, et (Δ) une droite passant par A coupe le cercle (C) en M et le cercle (C') en N. Les tangentes à (C) en M et à (C') en N se coupent en T.

1- Faire la figure.

2- Montrer que $\overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]$. Que peut-on déduire ?

EXERCICE 5 :

Deux cercles (C) et (C') se coupent en A et B. Soit E un point de (C) et F celui de (C') tels que A, E, F non alignés. une droite passant par B coupe (C) en G et (C') en H. Les droites (GE) et (HF) se coupent en I.

1- Faire la figure.

2- Démontrer que les points A, F, E et I sont cocycliques.

EXERCICE 6 :

Deux cercles (C) et (C') se coupent en A et B. Une droite (Δ) passant par A coupe (C) en E et (C') en F. Une autre droite (Δ') passant par B coupe (C) en G et (C') en H.

1- Faire la figure.

2- Démontrer que les droites (GE) et (HF) sont parallèles.

EXERCICE 7 :

On considère un triangle ABC quelconque et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M du plan, la droite passant par M et orthogonale

à la droite (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q .

1- Faire la figure.

2- Démontrer que $\overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$.

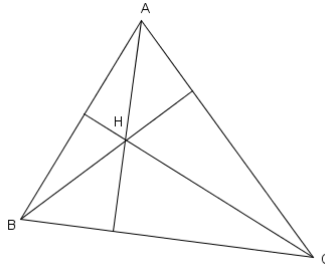
3- Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points F, P et Q sont alignés.

4- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overline{(FP, FQ)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$.

Solutions des exercices d'applications

Exercice 1 :

Démontrons que $\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$



Par hypothèse, la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (HC) d'une et la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (HB) d'autre part. c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (AB) \perp (HC) \\ (AC) \perp (HB) \end{cases} \quad \text{D'après la propriété des angles à côtés perpendiculaires}$$

On a :

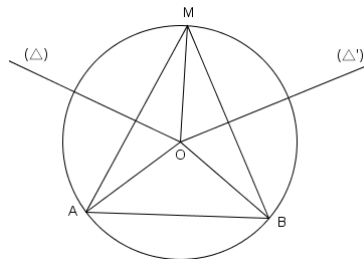
$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(HC, HB)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} - \overline{(HC, HB)} = 0[\pi]$$

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]}$$

Exercice 2 :

Démontrons que $\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]$



D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\overline{(OA, OB)} = \overline{(OA, OM)} + \overline{(OM, OB)}[\pi]$$

Or (Δ) et (Δ') sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{(OA, OM)}$ et $\widehat{(OM, OB)}$

$$\text{on a : } \begin{cases} \overline{(OA, OM)} = 2\overline{(\Delta, OM)}[\pi] \\ \overline{(OM, OB)} = 2\overline{(OM, \Delta')}[\pi] \end{cases}$$

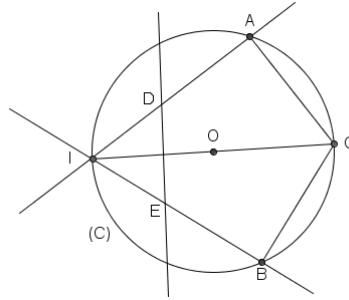
$$\Rightarrow \overline{(OA, OB)} = 2\overline{(\Delta, OM)} + 2\overline{(OM, \Delta')}[\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(OA, OB)} = 2\overline{(\Delta, \Delta')}[\pi]$$

$$\text{Or } \begin{cases} (\Delta) \perp (MA) \\ (\Delta') \perp (MB) \end{cases} \Rightarrow \overline{(\Delta, \Delta')} = \overline{(MA, MB)}[\pi]$$

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(MA, MB)}[\pi]}$$

EXERCICE 3 :



Démontrons que les points A, B, E et D sont cocycliques

Par hypothèse les points A, B, I, C sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(AB, AI)} = \overline{(CB, CI)}[\pi]$$

or les points A, D, I sont alignés alors on peut remplacer la droite (AI) par la droite (AD)

$$\text{on a : } \overline{(AB, AD)} = \overline{(CB, CI)}[\pi] \quad (1)$$

or la droite (CB) est perpendiculaire à la droite (EB) d'une part et la droite (CI) est perpendiculaire à la droite (ED) d'autre part. c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (CB) \perp (EB) \\ (CI) \perp (ED) \end{cases} \quad \text{D'après la propriété des angles à côtés perpendiculaires}$$

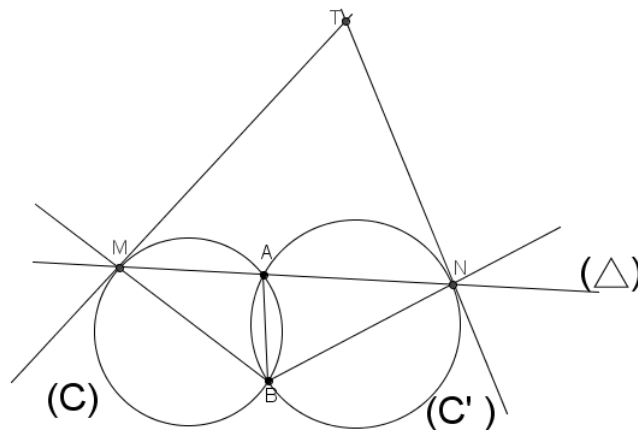
$$\text{on a : } \overline{(CB, CI)} = \overline{(EB, ED)}[\pi] \quad (2)$$

En remplaçant (2) dans (1)

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(AB, AD)} = \overline{(EB, ED)}[\pi]}$$

Donc les points A, B, D et E sont cocycliques.

EXERCICE 4 :



Démontrons que $\overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]$

Par hypothèse la droite (MT) est tangente à (C) en M d'une part et la droite (NT) est tangente à (C') en N d'autre part. Alors les angles $\widehat{(MT, MB)}$ et $\widehat{(AM, AB)}$ interceptent le même arc MB d'une part et les angles $\widehat{(NB, NT)}$ et $\widehat{(AB, AN)}$ interceptent le même arc BN. Alors d'après la propriété de la tangente-corde,

$$\text{on a : } \begin{cases} \overline{(MT, MB)} = \overline{(AM, AB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(NB, NT)} = \overline{(AB, AN)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1) + (2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} + \overline{(NB, NT)} = \overline{(AM, AB)} + \overline{(AB, AN)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles et la permutation des droites,

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} - \overline{(NT, NB)} = \overline{(AM, AN)}[\pi]$$

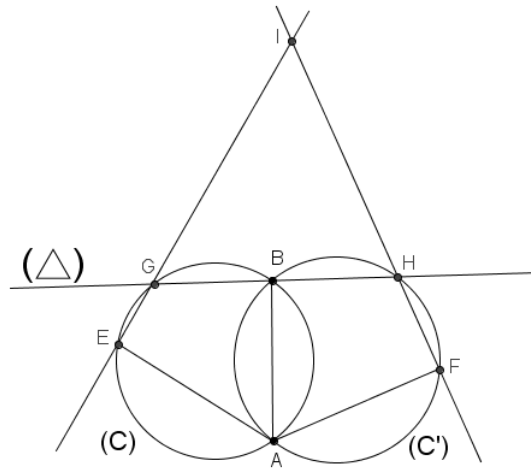
or les points M, A, N sont alignés $\Rightarrow \overline{(AM, AN)} = 0[\pi]$

$$\text{on a : } \overline{(MT, MB)} - \overline{(NT, NB)} = 0[\pi]$$

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(MT, MB)} = \overline{(NT, NB)}[\pi]}$$

On déduit que les points M, T, N, B sont cocycliques.

EXERCICE 5 :



Démontrons que les points A, F, I et E sont cocycliques

Par hypothèse les points A, B, G, E sont cocycliques d'une part et les points A, B, H, F le sont aussi d'autre part

$$\text{on a } \begin{cases} \overline{(AE, AB)} = \overline{(GE, GB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(AB, AF)} = \overline{(HB, HF)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1)+(2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(AE, AB)} + \overline{(AB, AF)} = \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\text{on a : } \overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

or les points G, B, H sont alignés, alors on peut remplacer la droite (GB) par la droite (HB)

$$\text{on a : } \overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, HB)} + \overline{(HB, HF)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

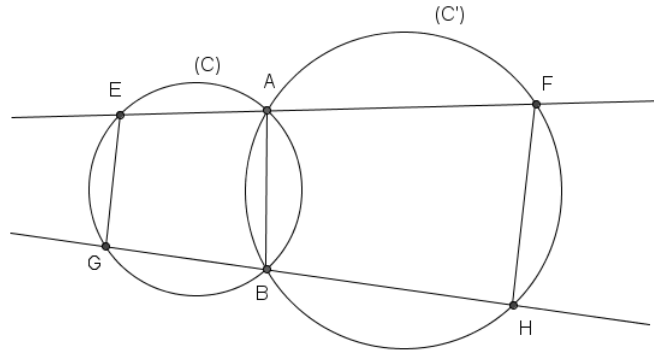
$$\overline{(AE, AF)} = \overline{(GE, HF)}[\pi]$$

or les points E, G, I sont alignés d'une part et les points H, F, I le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer les droites (GE) par (IE) et (HF) par (IF)

D'où $\overline{(AE, AF)} = \overline{(IE, IF)}[\pi]$

Donc les points A, F, I, E sont cocycliques.

EXERCICE 6 :



Démontrons que les droites (GE) et (HF) sont parallèles

Par hypothèse les points G, E, B, A sont cocycliques d'une part et les points F, A, B, H le sont aussi d'autre part

$$\text{on a } \begin{cases} \overline{(GE, GB)} = \overline{(AE, AB)}[\pi] & (1) \\ \overline{(HB, HF)} = \overline{(AB, AF)}[\pi] & (2) \end{cases}$$

Faisant (1)+(2) membre à membre,

$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)} = \overline{(AE, AB)} + \overline{(AB, AF)}[\pi]$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(HB, HF)} = \overline{(AE, AF)}[\pi]$$

or les points A, E, F sont alignés d'une part et les points B, G, H le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer le droite (HB) par (GB) et $\overline{(AE, AF)} = 0[\pi]$

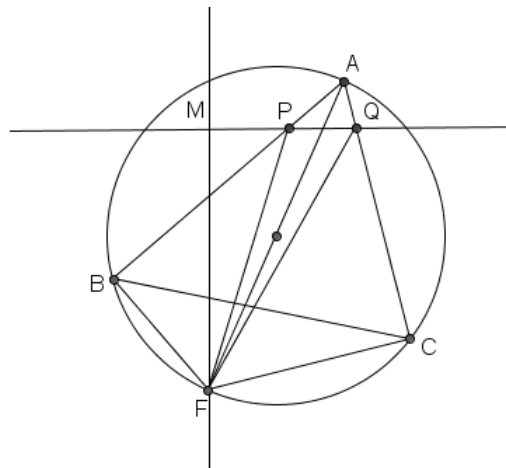
$$\text{on a : } \overline{(GE, GB)} + \overline{(GB, HF)} = 0[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\overline{(GE, HF)} = 0[\pi]$$

Donc les droites (GE) et (HF) sont parallèles.

EXERCICE 7 :



$$\text{1-Démontrons que } \overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, MB)} + \overline{(MB, AC)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, MB)} + \overline{(MB, MC)} + \overline{(MC, AC)}[\pi]$$

or les points A, P, B sont alignés d'une part et les points A, Q, C le sont aussi d'autre part, alors on peut remplacer les droites (AB) par (BP) et (AC) par (CQ)

$$\text{on a : } \overline{(AB, AC)} = \overline{(BP, MB)} + \overline{(MB, MC)} + \overline{(MC, CQ)}[\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(BP, BM)} + \overline{(CM, CQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi] \quad (1)$$

or les triangles BPF et MPF sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [PF], alors les points B, P, F, M sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(BP, BM)} = \overline{(FP, FM)}[\pi] \quad (2)$$

De même les triangles MFQ et CQF sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [FQ], alors les points C, Q, F, M sont cocycliques.

$$\text{on a : } \overline{(CM, CQ)} = \overline{(FM, FQ)}[\pi] \quad (3)$$

En remplaçant (2) et (3) dans (1), on a :

$$\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FM)} + \overline{(FM, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$$

D'après la relation de Chasles

$$\text{D'où } \boxed{\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]}$$

2- Déterminons l'ensemble des points M du plan pour lesquels les points F, P, Q sont alignés

Les points F, P, Q sont alignés si et seulement si : $\overline{(FP, FQ)} = 0[\pi]$

En considérant $\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$ or $\overline{(FP, FQ)} = 0[\pi]$

$$\text{on a : } \boxed{\overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]}$$

Alors les points M, A, B, C sont cocycliques.

$\boxed{\text{Donc l'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle ABC.}}$

3- Déterminons l'ensemble des points M tels que :

$$\overline{(FP, FQ)} = \overline{(AB, AC)}[\pi]$$

En considérant $\overline{(AB, AC)} = \overline{(FP, FQ)} + \overline{(MB, MC)}[\pi]$

$$\text{on a : } \overline{(AB, AC)} = \overline{(AB, AC)} + \overline{(MB, MC)}[\pi] \Rightarrow \overline{(MB, MC)} = \overline{(AB, AC)} - \overline{(AB, AC)}[\pi]$$

$$\boxed{\overline{(MB, MC)} = 0[\pi]}$$

Alors les points M, B, C sont alignés.

$\boxed{\text{Donc l'ensemble des points M est la droite (BC).}}$