

CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86 / 05 592 21 90

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE**I- GENERALITES****1) Définition :**

On appelle fonction numérique d'une variable réelle x toute application f de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie non vide de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ (ou d'une partie non vide de $\mathbb{R}$).

2) Ensemble de définition :**a) Définition :**

On appelle ensemble de définition d'une fonction numérique f , l'ensemble non vide qui est appliqué dans $\mathbb{R}$ par f noté Ef

b) Tableau récapitulatif

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions polynômes

Fonctions	Conditions d'existences
$f(x) = A(x)$	f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Ef =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$	f est définie si et seulement si $B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	f est définie si et seulement si $A(x) \geq 0$
$f(x) = \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}}$	f est définie si et seulement si $\begin{cases} \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}$	f est définie si et seulement si $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	f est définie si et seulement si $B(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{ A(x) }$	f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Ef =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{ A(x) + l}$; $l \in \mathbb{R}^*$	f est définie si et seulement si $ A(x) + l \geq 0$

3) Parité d'une fonction : Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, Ef l'ensemble de définition de f et (C) la courbe représentative de f

a) Fonction paire : f est paire si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $f(-x) = f(x)$

b) Fonction impaire : f est impaire si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $f(-x) = -f(x)$

4) Centre de symétrie d'une fonction

Le point $M(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe (Cf) de la fonction f si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Propriété :

Si $f(-x) = -f(x)$ alors le $O(0; 0)$ est le centre de symétrie de la courbe (C) .

5) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est l'axe de symétrie de (C) si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $f(2a - x) = f(x)$

Propriété :

Si $f(-x) = f(x)$ alors l'axe des ordonnées est l'axe de symétrie de la courbe (C).

II- LIMITE D'UNE FONCTION

Soient l et x_0 un nombre réel et f une fonction numérique de la variable réelle x

1- Définition

On dit que la fonction f a pour limite l lors que x tend vers x_0 , si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proche que l'on veut de l pour des valeurs x suffisamment proche de x_0 . On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

2- limite à gauche et limite à droite**● limite à gauche**

Si l est la limite de f quand x tend vers x_0 à gauche alors on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

● limite à droite

Si l est la limite de f quand x tend vers x_0 à droite alors on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

3- Limites de référence ou limites classiques

Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul

Indiquons le signe de x à gauche et à droite. Si $x = 0$ on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de x	(à gauche de 0)	- +	(à droite de 0)

- Si $a > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = -\infty$
- Si $a < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = +\infty$
- Si $a > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = +\infty$
- Si $a < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$

4- Formes indéterminées

On distingue quatre formes indéterminées qui sont : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $(0)(\pm\infty)$; $-\infty + \infty$

5-Calculs acceptables : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$; $\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$; $\frac{a}{\pm\infty} = 0$; $\frac{a}{0} = \pm\infty$
 $(-\infty)(+\infty) = -\infty$; $(-\infty)(-\infty) = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$; $+\infty + \infty = +\infty$

Théorèmes

• Soient f , g et h trois fonctions numériques, a représente un nombre réel ou infini et l un nombre réel tel que : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. On a : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

- Soient f et g deux fonctions et l un nombre réel telles que : $|f(x) - l| \leq g(x)$
 Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

- Soient f et g deux fonctions telles que : $f(x) \leq g(x)$
 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- Soient f et g deux fonctions telles que : $f(x) \geq g(x)$
 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

III- ETUDE DES BRANCHES INFINIES

On désigne par f une fonction numérique, E_f l'ensemble de définition de f et (C) sa courbe

représentative.

Soient x_0 et l deux nombres réels.

A) Asymptotes

1-Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$

alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

2- Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

3- Asymptote oblique

Soit la droite d'équation $y = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

Théorème

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g .

Les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont dite asymptotiques si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

B) Les branches infinie

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

1-Branche parabolique de direction (ox) ou d'axe des abscisses

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $\pm\infty$

2-Branche parabolique de direction (oy) ou d'axe des ordonnées

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $\pm\infty$

3-Branche parabolique et asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$

a) Branche parabolique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$

alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

b) Asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ avec $b \in \mathbb{R}$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Branche asymptotique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$ n'admet pas de limite, alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche asymptotique de direction de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

IV- CONTINUITE

1) Continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0 et l un nombre réel telle que $f(x_0) = l$

On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

2) Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

2) Prolongement par continuité

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

On appelle prolongement de f par continuité en x_0 , toute fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) , \text{ si } x \in Ef \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

3) Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Soit f une fonction continue et monotone.

- L'image d'un intervalle $I = [a; b]$ par f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$;
- L'image d'un intervalle $I =]a; b[$ par f est l'intervalle $] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$;
- L'image d'un intervalle $I = [a; b[$ par f est l'intervalle $[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$;
- L'image d'un intervalle $I =]a; b]$ par f est l'intervalle $] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$;

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur et strictement monotone sur un intervalle I contenant a et b ($a < b$) de plus $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un nombre réel $\alpha \in [a; b]$ tel que l'équation $f(x) = 0$ ou $f(\alpha) = 0$.

V- DERIVATION

1- Dérivabilité d'une fonction en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0 .

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$

Le nombre réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se noté : $f'(x_0) = l$.

2- Dérivabilité de f à gauche de x_0

f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$

Le nombre réel l_1 est appelé le nombre dérivé à gauche en x_0 de f et se noté : $f'_g(x_0) = l_1$.

3- Dérivabilité de f à droite de x_0

f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$

Le nombre réel l_2 est appelé le nombre dérivé à gauche en x_0 de f et se noté : $\underline{f'_d(x_0)} = l_2$.

Propriété

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.
- Si f est dérivable en x_0 alors $\boxed{EDf = ECf = Ef}$.
- Si une fonction f est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

4- Interprétation géométrique (graphique) du nombre dérivé

- Si $\boxed{f'_g(x_0) = \pm\infty; f'_d(x_0) = \pm\infty}$ alors le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point de rebroussement. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une demi-tangente verticale.
- Si $\boxed{f'_g(x_0) = \pm\infty; f'_d(x_0) = 0}$ alors le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux qui se comporte comme un point de rebroussement. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes l'une verticale à gauche et l'autre horizontale à droite.
- Si $\boxed{f'_g(x_0) = l_1; f'_d(x_0) = l_2}$ où $l_1 \neq l_2$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, alors le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes obliques.
- Si $\boxed{f'_g(x_0) = l_1; f'_d(x_0) = 0}$ où $l_1 \in \mathbb{R}$, alors le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes l'une obliques à gauche et l'autre horizontale à droite.

5- Fonctions dérivées

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

On appelle fonction dérivée de f , la fonction notée f' .

Tableau récapitulatif de calcul des fonctions dérivées

Soient U et V deux fonctions dérivables, a est une constante et n un nombre réel non nul.

Fonctions	Dérivées
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = uv$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$

Fonctions	Dérivées
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u' \sin u$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u' \cos u$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \tan u$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$f(x) = \cotan x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \cotan u$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Equation de la tangente en x_0

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
L'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ en x_0 est déterminée par la formule

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$

- S'il existe un nombre réel k tel que pour tout $x \in [a; b]$, $|f'(x)| \leq k$

alors pour tout $\alpha \in [a; b]$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha|$

- S'il existe deux nombres m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$

alors
$$m \leq \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq M$$

Théorème de Rôle

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f'(\alpha) = 0$

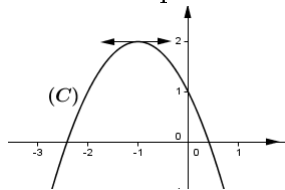
Extremum

On dit que la fonction f admet un extremum égal à b au point $x = a$

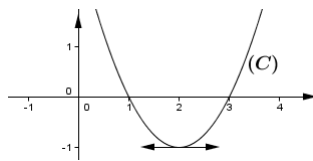
si et seulement si $f(a) = b$ et $f'(a) = 0$

NB : Un extremum peut être un maximum ou un minimum.

- Il est un maximum lors que la courbe passe en dessous de l'extremum ;
- Il est un minimum lors que la courbe passe au dessus de l'extremum.



Un maximum



Un minimum

Point d'inflexion

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f .

- On dit que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion en un point x_0 lors que la dérivée première f' de f s'annule sans changée de signe en x_0 .
- On dit que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion en un point x_0 lors que la dérivée seconde f'' de f s'annule en changeant de signe en x_0 .

N.B : En un point d'inflexion la tangente coupe la courbe.

Fonction bijective et bijection réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est bijective (ou f réalise une bijection) de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$.

Ainsi f admet une bijection réciproque, notée f^{-1} qui aussi bijective de l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I ; continue, monotone et de même sens de variation que f .

Détermination de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x .

$$\bullet \boxed{f^{-1}[f(x)] = x} \quad \bullet \boxed{f[f^{-1}(x)] = x} \quad \bullet f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

- Pour expliciter la réciproque de $f(x)$ notée $f^{-1}(x)$, on pose $f(x) = y$ et on déduit l'expression de x en fonction de y .

Ainsi $f^{-1}(x)$ est égale à l'expression déduite de x en fonction de y .

Exemple : On donne $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Explicitons $f^{-1}(x)$ puis calculons $f^{-1}(3)$: Posons $f(x) = y \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = y \Rightarrow 2x+1 = xy-y$
 $2x - xy = -y - 1 \Rightarrow x(2 - y) = -y - 1 \Rightarrow x = \frac{-y-1}{2-y} = \frac{-(y+1)}{-(y-2)} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2}$.

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

• **Calcul de $f^{-1}(x_0)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$**

Pour calculer $f^{-1}(x_0)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$, on résout l'équation $f(x) = x_0$. Ainsi $f^{-1}(x_0)$ est égale à la valeur de x trouvée.

Exemple : On donne $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Calculons $f^{-1}(3)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$

Posons $f(x) = 3 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow 2x-3x = -3-1 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$.

Donc $f^{-1}(3) = 4$

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x , continue et monotone sur un intervalle I .

La dérivée de la réciproque de la fonction f est calculer par la formule $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

VI- POSITIONS D'UNE COURBE

1- Position d'une courbe par rapport à une droite

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f et (D) la droite d'équation $y = ax + b$

Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) revient à étudier le signe de la fonction $f(x) - y$

- Si $f(x) - y > 0$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D)
- Si $f(x) - y < 0$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la droite (D)

2- Position relative de deux courbes

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonction f et g .

Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la courbe $(\mathcal{C}')$ revient à étudier le signe de la fonction $f(x) - g(x)$

- Si $f(x) - g(x) > 0$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la courbe $(\mathcal{C}')$
- Si $f(x) - g(x) < 0$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la courbe $(\mathcal{C}')$
- Si $f(x) = -g(x)$ alors les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

3- Points d'intersections d'une courbes par rapport aux axes du repère

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Points d'intersections avec l'axe des abscisses

La courbe $(\mathcal{C})$ traverse l'axe des abscisses (ox) lorsque la fonction $f(x)$ change de signe dans un intervalle. Dans ce cas on résout l'équation $f(x) = 0$

En résolvant l'équation $f(x) = 0$, si on trouve $x = a$ ou $x = b$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

alors $(\mathcal{C}) \cap (ox) = \{A(a; 0); B(b; 0)\}$

b) Point d'intersection avec l'axe des ordonnées

La courbe $(\mathcal{C})$ traverse l'axe des ordonnées (oy) lorsque zéro (0) appartient à l'ensemble de définition E_f de f . Dans ce cas on calcule $f(0)$. Si $f(0) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $(\mathcal{C}) \cap (oy) = \{A(0; a)\}$

c) Points d'intersections de deux courbes

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonction f et g .

Pour déterminer les points d'intersections des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, on résout l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

VII- ETUDE DES FONCTIONS CIRCULAIRES OU TRIGONOMETRIQUES**1) Définition :**

On appelle fonction circulaire toute fonction numérique qui contient au moins une ligne trigonométrique

(sin, cos, tan et cotan).

2) Plan d'étude

Le plan d'étude d'une fonction circulaire est identique à celui de n'importe autre fonction. Toute fois en étudiant la périodicité juste après avoir donner l'ensemble de définition.

3) Ensemble de définition

Les fonctions de la forme $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ se comportent comme des fonctions polynômes, elles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

4) Périodicité

a) Le but de la périodicité est de réduire l'intervalle d'étude de la fonction.

b) Une fonction numérique f est périodique de période T ($T > 0$),

si pour tout $x \in E_f$, $f(x + T) = f(x)$

• Dans ce cas on peut étudier la fonction f sur l'intervalle de longueur T

c-à-d sur l'intervalle $[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}]$ ou $[0 ; T]$ ou encore $[-T ; 0]$

• Si la fonction est paire ou impaire alors on peut l'étudier sur l'intervalle $[0 ; \frac{T}{2}]$

c) Pour déduire son étude sur tout son ensemble de définition, on effectue des translations successives de vecteur $(kT)\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$

5) Calcul de la période

Fonctions	Périodes
$f(x) = \cos(ax + b)$ $f(x) = \sin(ax + b)$	$T = \frac{2\pi}{ a }$
$f(x) = \tan(ax + b)$ $f(x) = \cotan(ax + b)$	$T = \frac{\pi}{ a }$

6) Limites classiques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

7) Equations trigonométriques

$$\cos a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin a = 0 \Rightarrow a = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \cos a = 1 &\Rightarrow a = 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) & \quad \sin a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos a = -1 &\Rightarrow a = \pi + 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) & \quad \sin a = -1 \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos a = \cos b &\Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}, & & \sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}, & (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1) Définition :

On appelle fonction logarithme népérien d'une variable réelle x la fonction notée $\ln x$, la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 0 en 1.

2) Propriétés

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \ln 1 = 0 ; \quad \ln e = 1 ; \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ; \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \\ \ln a^n = n \ln a ; \quad \ln a^\alpha = \alpha \ln a ; \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \ln x^n = n \ln |x| \end{aligned}$$

3) Conditions d'existences

Soit u une fonction numérique

Fonctions	Conditions d'existences
$f(x) = \ln u$	f est définie si $u > 0$
$f(x) = \ln u $	f est définie si $u \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{\ln u}$	f est définie si $\begin{cases} u > 0 \\ \ln u \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{u \ln u}$	f est définie si $\begin{cases} u > 0 \\ u \ln u \neq 0 \end{cases}$

4) Limites de référence ou limites classiques

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \alpha > 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^\alpha \ln x = 0 \quad ; \alpha > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \quad \alpha > 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

5) Fonctions dérivées et fonctions primitives

Soient u une fonction numérique, a et b deux nombres réels et c une constante

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Primitives
		$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$
$f(x) = \ln u $	$f'(x) = \frac{u'}{u}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b + c$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+b}$	$\ln x+b + c$
		$\ln x$	$-x + x \ln x + c$

EXERCICE : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$

Etudier et représenter graphiquement la courbe de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

6) FONCTION LOGARITHME DECIMAL

a) **Définition** On appelle fonction logarithme décimal de la variable réelle x , la fonction notée

$\log x$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

b) **Fonction dérivée**

Soit $f(x) = \log x \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{\ln 10}\right) \ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{\ln 10}\right) \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

7) FONCTION LOGARITHME DE BASE a

a) **Définition** On appelle fonction logarithme de base a de la variable réelle x , la fonction

notée $\log_a(x)$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Propriété : Pour tous éléments a, b de $]0; +\infty[$: $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

b) **Fonction dérivée**

Soit $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{\ln a}\right) \ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{\ln a}\right) \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

FONCTIONS EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) **Définition** :

On appelle fonction exponentielle de base e de la variable réelle x la fonction notée e^x ou $\exp(x)$, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien de x définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

2) **Propriétés** : Pour tous $m, n, x, y \in \mathbb{R}$

$$e^m e^n = e^{m+n} ; (e^m)^n = e^{m \times n} ; \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n} ; e^{-n} = \frac{1}{e^n} ; e^m = e^n \Rightarrow m = n$$

$$\ln e^x = x ; e^x = y \Rightarrow x = \ln y ; e^{\ln x} = x ; \ln x = y \Rightarrow x = e^y$$

$$e^m \geq e^n \Rightarrow m \geq n ; e^m \leq e^n \Rightarrow m \leq n$$

3) **Ensemble de définition**

Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x telle que : $f(x) = e^{g(x)}$.

L'ensemble de définition de la fonction f est le même que celui de la fonction g .

4) **Limites de référence ou limites classiques**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0 , \alpha > 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty , \alpha > 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

5) **Croissance comparées**

La fonction exponentielle croît vite que la fonction polynôme, et la fonction polynôme croît vite que la fonction logarithme. Ainsi : Pour tout nombre réel $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha - \ln x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^\alpha) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

6) Fonctions dérivées et fonctions primitives

Soient u une fonction numérique, a et b deux nombres réels et c une constante.

Fonctions	Dérivées
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) = -e^{-x}$

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
$f(x) = e^{-x}$	$F(x) = -e^{-x} + c$

EXERCICE : Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x$

Etudier et représenter graphiquement la courbe de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

7- FONCTIONS EXPONENTIELLE DE BASE a OU FONCTION PUISSANCE

a) Définition :

On appelle fonction exponentielle de base a ou fonction puissance de la variable réelle x , la fonction notée a^x , définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ par : $a^x = e^{x \ln a}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$

b) Limites de référence ou limites classiques

Pour $0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Pour $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

PRIMITIVE ET INTEGRALE

I- PRIMITIVE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1) Définition :

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

2) Propriétés :

○ Si f est une fonction continue sur I alors f admet une primitive sur I .

○ f admet une primitive F sur I alors toute primitive de f sur I est de la forme :

$f(x) = F(x) + c$ où c est une constante.

○ On note $F(x) = \int f(x) dx$

3) Tableau des primitives usuelles

Soient u une fonction dérivable sur I , et n deux nombres réels ($n \neq -1$).

a, b et c sont des constantes.

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = (ax + b)^n$	$F(x) = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + c$
$f(x) = \frac{u'}{u^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u} + c$

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = u' \cos u$	$F(x) = \sin u + c$
$f(x) = u' \sin u$	$F(x) = -\cos u + c$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$f(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$F(x) = \tan u + c$
$f(x) = \frac{u'}{\sin^2 u}$	$F(x) = -\cot u + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x + c$

II- CALCUL INTEGRAL**1) Définition :**

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux éléments de I .

On appelle intégrale de a à b de f , le nombre réel $F(b) - F(a)$. F est une primitive de f sur I .

On note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2) Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et a, b et c trois éléments de I .

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0 \quad b) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad c) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$d) \text{ Pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$e) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ; \quad \text{Si } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$f) \text{ Si } f \text{ est paire, } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad g) \text{ Si } f \text{ est impaire, } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

3) Intégration directe

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I contenant a et b alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4) Intégration par parties

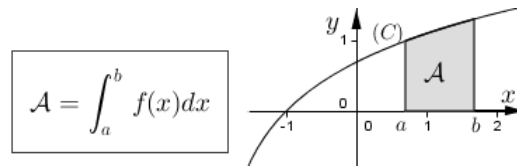
Soient u, v, u' et v' quatre fonctions continues sur $[a; b]$. Où u' et v' sont les dérivées de u et v .

$$\text{On a : } \int_a^b (uv')dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)dx \quad \int_a^b (u'v)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (uv')dx$$

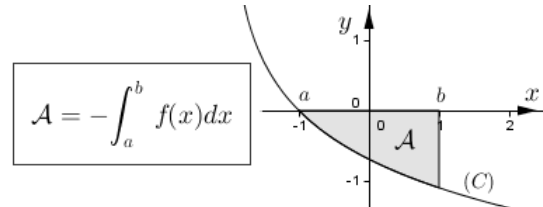
5) CALCUL D'AIRE

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ de courbe représentative respective (C) et (C') dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (d) la droite d'équation $y = ax + b$

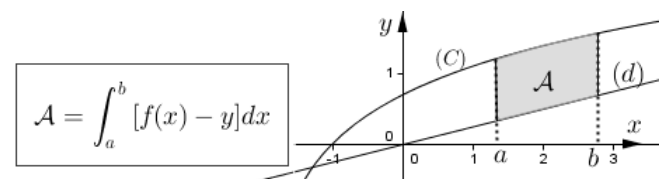
a) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



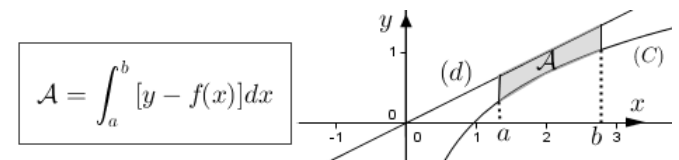
b) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



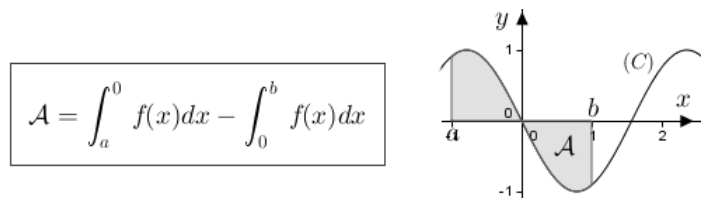
c) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , la droite (d) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



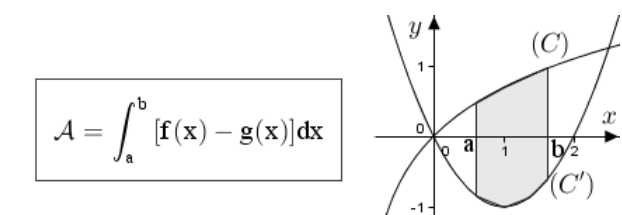
d) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , la droite (d) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



e) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



e) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , la courbe (C') et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que :



Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I avec $a < b$ si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$,

alors
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, $a \neq b$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$, le nombre réel m tel que :
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$