

CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90/01 130 18 80

HOMOTHETIES ET AFFINITES

I-HOMOTHETIES

Soit f une application du plan dans lui-même et k un nombre réel différent de 0 et de 1.

1) Définition :

On appelle homothétie de rapport k toute application h du plan dans lui-même qui à tous

points M et N associe les points M' et N' tels que $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

2) Eléments caractéristiques :

Les éléments caractéristiques d'une homothétie sont : le centre et le rapport

a) Le centre : Le centre est le point invariant de l'homothétie.

Soit Ω le centre de l'homothétie h , on a : $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow (MM') \cap (NN') = \{\Omega\}$

b) Le rapport : Soit k le rapport de l'homothétie h , on a : $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow k = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}}$

3) Existence d'une homothétie :

Pour montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme M en M' et N en N' , il suffit de constater que les droites (MN) et $(M'N')$ ne sont pas parallèles et que $k = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}} \neq 1$

4) Expression analytique

Soit $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui transforme M en M'

avec $M(x; y)$, $M'(x'; y')$ et $\Omega(x_0; y_0)$

$$\begin{cases} h(\Omega) = \Omega \\ h(M) = M' \end{cases} \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

5) La réciproque d'une homothétie

Soit $h(\Omega; k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

La réciproque de $h(\Omega; k)$ est une homothétie notée h^{-1} telle que $h^{-1}(\Omega; \frac{1}{k})$

Remarque

Soit $h(\Omega; k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

- Si $k = 1$ alors h est une identité du plan : $h(\Omega; k) = Id_{\mathcal{P}}$
- Si $k = -1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω : $h(\Omega; k) = S_{\Omega}$

6) La composée de deux homothéties de même centre

Soient h et h' deux homothéties de même centre Ω et de rapport respectifs k et k' .

La composée de h et h' est une homothétie de centre Ω et de rapport kk'

$$h(\Omega; k) \circ h'(\Omega; k') = h(\Omega; k \times k')$$

- Si $kk' = 1$ alors h est une identité du plan : $h(\Omega; k) = Id_{\mathcal{P}}$
- Si $kk' = -1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω : $h(\Omega; k) = S_{\Omega}$

7) La composée de deux homothéties de centre distinct

Soient h_1 et h_2 deux homothéties respectivement de centre A et B , et de rapport k et k' .

La composée de h_1 et h_2 est une homothétie de centre Ω et de rapport kk'

$$h_2(B; k') \circ h_1(A; k) = h(\Omega; kk')$$

On distingue deux cas possibles :

Premier cas : Si $kk' = 1$ et $h(B; k') \circ h(A; k)(M) = M'$ alors $h'(B; k') \circ h(A; k) = t_{\overrightarrow{MM'}}$

Le vecteur de cette translation est déterminé par la formule : $\overrightarrow{U} = (1 - k)\overrightarrow{AB}$. Où $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{MM'}$

Démonstration

Soient les points M , M_1 et M' tels que :

$$h_2(B; k') \circ h_1(A; k)(M) = M' \quad \text{soit} \quad h_1(A; k)(M) = M_1 \quad \text{et} \quad h_2(B; k')(M_1) = M'$$

$$h_1(A; k)(M) = M_1 \iff \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad h_2(B; k')(M_1) = M' \iff \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM} & (1) \\ \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Fixons } A \text{ dans (2) : } \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'} = k'\overrightarrow{BA} + k'\overrightarrow{AM_1}$$

$$\text{Remplaçons (1) dans (2) : } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'} = k'\overrightarrow{BA} + kk'\overrightarrow{AM} \quad \text{or} \quad kk' = 1$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'} = k'\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - k'\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow (1 - k')\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}$$

$$(1 - k')\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{M'M} \Rightarrow (1 - k')\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (1 - k')\overrightarrow{AB} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{U} = \overrightarrow{MM'}$$

$$\text{D'où} \quad \overrightarrow{U} = (1 - k)\overrightarrow{AB}$$

Deuxième cas : Si $kk' \neq 1$

alors h est une homothétie de centre Ω et de rapport kk' : $h_2(B; k') \circ h_1(A; k) = h(\Omega; kk')$

$$\text{Le centre } \Omega \text{ de } h \text{ se construit par la formule : } \overrightarrow{A\Omega} = \left(\frac{1 - k'}{1 - kk'} \right) \overrightarrow{AB}$$

Démonstration

Soient les points M , M_1 et M' tels que : $h_2(B; k') \circ h_1(A; k)(M) = M'$

$$h(\Omega; kk')(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = kk'\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\text{Soit} \quad h_1(A; k)(M) = M_1 \quad \text{et} \quad h_2(B; k')(M_1) = M'$$

$$h_1(A; k)(M) = M_1 \iff \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad h_2(B; k')(M_1) = M' \iff \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM} & (1) \\ \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Fixons } A \text{ dans (2) : } \overrightarrow{BM'} = k'\overrightarrow{BM_1} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'} = k'\overrightarrow{BA} + k'\overrightarrow{AM_1}$$

$$\text{Remplaçons (1) dans (2) : } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'} = k'\overrightarrow{BA} + kk'\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} - kk'\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA}$$

$$\text{Fixons } \Omega \text{ dans } \overrightarrow{AM'} \text{ et } \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} - kk'\overrightarrow{A\Omega} - kk'\overrightarrow{\Omega M} = (k' - 1)\overrightarrow{BA} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\Omega M'} = kk'\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\overrightarrow{A\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} - kk'\overrightarrow{A\Omega} - kk'\overrightarrow{\Omega M} = (k' - 1)\overrightarrow{BA} \Rightarrow (1 - kk')\overrightarrow{A\Omega} = (1 - k')\overrightarrow{AB}$$

$$\text{D'où} \quad \overrightarrow{A\Omega} = \left(\frac{1 - k'}{1 - kk'} \right) \overrightarrow{AB}$$

Remarque

Si $kk' \neq 1$ et $h(A; k) \circ h'(B; k')(M) = M'$ alors $\Omega = (AB) \cap (MM')$

II-AFFINITES DU PLAN

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, Δ une direction de droite distincte de celle de $(\mathcal{D})$ et k un nombre réel.

1) Définition :

On appelle affinité d'axe $(\mathcal{D})$ de direction Δ et de rapport k , l'application f qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $f_{(\mathcal{D}, \Delta, k)}(M) = M' \iff \boxed{\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}}$ où H est le projeté de M sur la droite $(\mathcal{D})$ suivant la direction Δ .

Remarque

Lorsque la direction Δ est orthogonale à l'axe $(\mathcal{D})$ de l'affinité f alors f est l'affinité orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ et de rapport k .

- Si $k = 0$ alors f est la projection sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction Δ .
- Si $k = 1$ alors f est l'application identique du plan
- Si $k = -1$ et si la direction Δ est orthogonale à l'axe $(\mathcal{D})$ alors f est la réflexion d'axe $(\mathcal{D})$.
- L'ensemble des points invariant d'une affinité est son axe.

2) Expression analytique :

Dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

f est une affinité orthogonale d'axe $(o\vec{i})$ (l'axe des abscisses) et de rapport k .

avec $(\mathcal{D}) = (o\vec{i})$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $H(x_H, y_H)$

H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses : $H \in (o\vec{i}) \Rightarrow x_H = x$ et $y_H = 0$

$$f(M) = M' \iff \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_H \\ y - y_H \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x_H = k(x - x_H) \\ y' - y_H = k(y - y_H) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - x = k(x - x) \\ y' - 0 = k(y - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow f : \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad \text{et} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{k}y' \end{cases}$$

Remarques

- Tout point situé sur l'axe des abscisses a pour ordonnée zéro (0)
- Tout point situé sur l'axe des ordonnées a pour abscisse zéro (0).

EXERCICE 1 :

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de coté 6 cm.

On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1- Faire la figure. On tracera BC horizontalement.

2- Montrer que les points B , C , I et K sont cocycliques. Tracer leur cercle de cocyclicité.

3- Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Déterminer et construire l'ensemble (E)

b) Montrer que A appartient à l'ensemble (E) .

4- Soit G l'isobarycentre des points A , B et C c'est-à-dire que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui permet d'obtenir le point G à partir du point C .

5- Soit h l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tels que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

6- Soit h et h' les homothétie de centre et de rapport respectifs I et G , $\frac{1}{3}$ et -2

On considère l'application f telles que : $f = h\left(I, \frac{1}{3}\right) \circ h(G, -2)$

- a) Donner la nature de f
- b) Montrer que le centre O de f est le barycentre des points G et I affectés des coefficients respectifs a et b dont on précisera.
- c) Construire le centre O de f .

EXERCICE 2 :

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O . I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude plane directe f de centre A qui transforme I en D .

2- Soit g l'application définie par : $g = h(B; 2) \circ R(O; \frac{\pi}{2})$

- a) Donner la nature de g .
 - b) Déterminer les images des points O et A par g .
 - c) Déterminer et construire le centre Ω de g .
- 3- On considère l'application $\varphi = h(O; \frac{1}{2}) \circ S_{BC}$.
- a) Donner la nature de l'application φ .
 - b) Déterminer et construire le centre Ω_1 et l'axe (Δ) de φ .