

Equations différentielles

A. Equations différentielles :

Exercice 3647

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x \cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle.

Exercice 3663

- Déterminer l'expression de la fonction f vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

- Déterminer l'expression de la fonction g vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} g' = 2 \cdot g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

- Déterminer l'expression de la fonction h vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} h' = 2 \cdot h \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

Exercice 3664

- On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x \cdot e^{-x}$$

est une solution de l'équation différentielle (E).

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$$

Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 3 \cdot e^{-3x}$$

Exercice 3673

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif :

$$x \cdot f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

- Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

vérifie :

$$(E) : \begin{cases} \text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif :} \\ g'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

- Conjecturer l'expression des fonctions g vérifiant :

$$g'(x) = e^{2x}$$

- Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

B. Equations différentielles : $y' = ay$:

Exercice 3678

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

- Vérifier que la fonction f est solution de l'équation dif-

férentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

- On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

- Résoudre l'équation différentielle (E').

- Conclure.

□ **Exercice 3679**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

- a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$
c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

□ **Exercice 3680**

Dans chaque cas, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :

- $y' = a \cdot y$
a. $f(x) = -3 \cdot e^{4x}$ b. $f(x) = 4 \cdot e^{0,2x}$

□ **Exercice 3681**

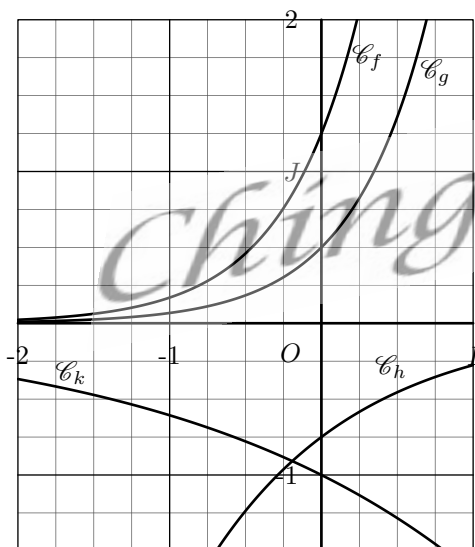
Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

- a. $y' - 3y = 0$; $f(0) = 2$
b. $2y' + 3y = 0$; $f(0) = -1$
c. $3y' - 2y = 0$; $f(\frac{3}{2}) = 2$
d. $y - 3y' = 0$; $f(6) = e^3$

□ **Exercice 3683**

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = a \cdot y \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$



En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

□ **Exercice 3687**

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1) : y' - 2y = x \cdot e^x$$

- Résoudre l'équation différentielle :
(2) : $y' - 2y = 0$,
où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $u(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^x$
 - Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).
 - En déduire l'ensemble des solutions de (1).
- Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

□ **Exercice 3966**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' = 2 \cdot y + \cos x$$

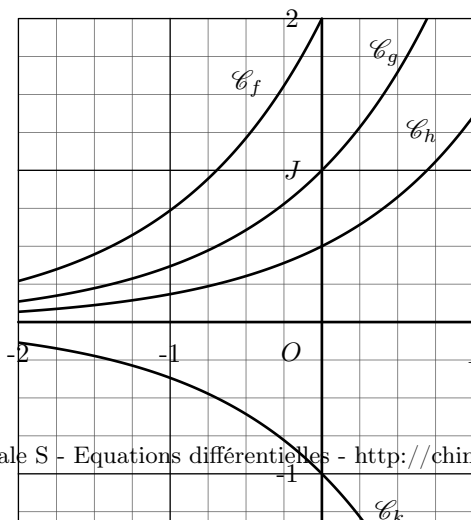
- Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f_0(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$
soit une solution f_0 de (E).
- Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2 \cdot y$.
- Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0) .
- En déduire les solutions de (E).
- Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k(\frac{\pi}{2}) = 0$

C. Equations différentielles : $y' = ay + b$:

□ **Exercice 3682**

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = y$$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ses fonctions.



Exercice 3689



On considère une l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x} \cdot \varphi(x).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3 \cdot \varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.



Exercice 3691



En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (*exprimé en années*) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \begin{cases} u'(x) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

1. On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$.

On considère, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4} \cdot h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

2. Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4} \cdot y + \frac{1}{12}$$

et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?



Exercice 3692



Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 2$

b. $y' - 3y = -3$

c. $6y = 3y' + 2$

d. $5y = \frac{3}{2}y' + \frac{1}{3}$



Exercice 3693



Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4y' - y = 4$; $y(1) = e$

b. $15y' + 24y = 12$; $y\left(\frac{5}{4}\right) = 2$

c. $-\frac{3}{2}y' + \frac{1}{4}y = -1$; $y(3) = 6 + 2e$

Chingatome.net