

Exponentielles

A. Relations différentielles :

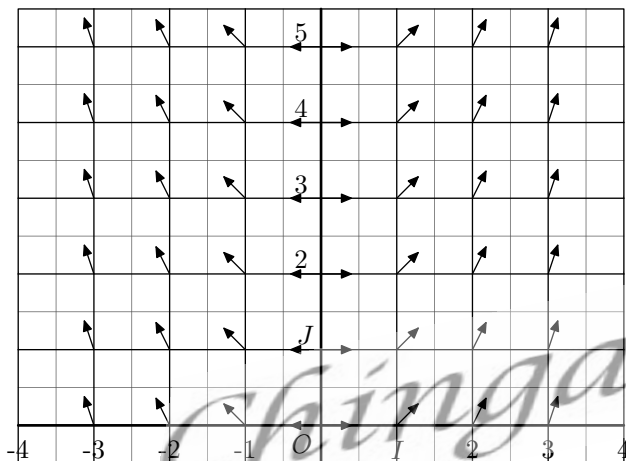


Exercice 3340



Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :
 $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Donner au moins deux fonctions qui vérifient cette relation.
2. On propose le champs de tangentes représenté ci-dessous :



- a. Vérifier que chaque tangente représentée sur la droite d'équation $x = 2$ a pour coefficient directeur 2.
- b. Vérifier que pour chaque tangente ayant pour origine le point de coordonnées $(x ; y)$, son coefficient directeur est x .

3. On considère maintenant la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$f(0) = \frac{3}{2} ; f'(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

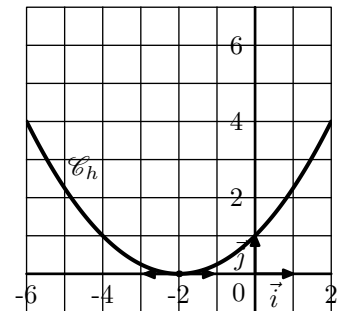
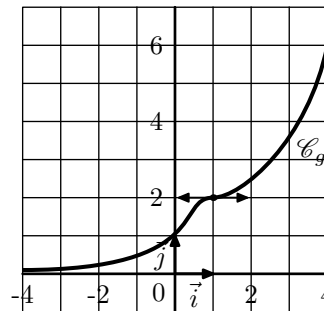
Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



Exercice 3580



On considère deux fonctions g et h dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :



Justifier que, dans les deux cas, ces courbes ne vérifient pas les conditions d'une fonction f telle que :

$$f(0) = 1 ; f'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$



Exercice 3342



Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyau à l'instant t . En observant ce phénomène sur variation de temps, Δt , on se rend compte que le nombre d'atomes a connu une variation de $\Delta N(t)$ et on a réussi à établir la formule suivante :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \cdot \Delta t$$

où λ est une constante dépendant uniquement de la nature des noyaux observés.

1.
 - a. La durée de demi-vie du Radon-220 est de 56 s. Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du Radon-220.
 - b. On part d'un échantillon contenant 238 g contenant environ $6,02 \times 10^{23}$ noyau d'uranium. Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
 $119 \text{ g} ; 59 \text{ g}$
2.
 - a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$
 - b. En supposant que la fonction N , dépendant du temps t , est dérivable, établir la formule suivante :

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

B. Propriétés algébriques :

□ **Exercice 3589**

Simplifier les expressions suivantes :

- a. $\exp(3) \cdot \exp(5)$ b. $\exp(-2) \cdot \exp(4)$
 c. $\frac{1}{\exp(-5)}$ d. $[\exp(5)]^3$

□ **Exercice 3590**

Simplifier les expressions suivantes :

- a. $e^3 \cdot e^4$ b. $e^4 \cdot e^{-4}$
 c. $(e^4)^3 \cdot e^4$ d. $\frac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$
 e. $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$ f. $\frac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

C. Equations et inéquations :

□ **Exercice 3593**

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

- a. $\exp(x) = e$ b. $\exp(-x) = 1$
 c. $\exp(2x - 1) = e$ d. $e^{x^2+x} = 1$
 e. $e^x - e^{-x} = 0$ f. $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$

□ **Exercice 3594**

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

- a. $\exp(x) < e$ b. $\exp(-x) \geq 1$
 c. $\exp(2x - 1) > e^x$ d. $e^x + e^{-x} < 2$

(Pour la dernière inéquation, pensez à une factorisation)

□ **Exercice 3616**

□ **Exercice 3608**

Simplifier les expressions suivantes :

- a. $e^5 \cdot e^6$ b. $\frac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}}$
 c. $(e^3)^{-2} \cdot e^5$ d. $(e^2 + e^{-2}) \cdot (e^2 - e^{-2})$

□ **Exercice 3609**

- Justifier que la fonction suivante est paire :
 $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$
- Justifier que la fonction suivante est impaire :
 $g : x \mapsto e^x - e^{-x}$

Résoudre les équations suivantes :

- a. $e^x + e^{-x} = 0$ b. $e^{3x+1} = e^{-2x+3}$
 c. $e^{2x} - 1 = 0$ d. $e^{2x} + 2 \cdot e^x - 3 = 0$

(Pour les deux dernières équations, on effectuera le changement de variable $X = e^x$)

□ **Exercice 3617**

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $e^x < 1$ b. $e^{-x} > 0$
 c. $e^{-x} > 1$ d. $e^x - e^{-x} > 0$
 e. $e^{2x} - 1 \geq 0$ f. $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

(Pour les deux dernières inéquations, on effectuera le changement de variable $X = e^x$)

D. Limites :

□ **Exercice 3614**

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
 e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

□ **Exercice 3661**

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \cdot e^{-x}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (x^2 - x + 1)$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$ d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$
 e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} + 3x + 1$ f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} - e^{-x}$

□ **Exercice 3662**

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{3}{x}} - 1)$
 e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$

□ **Exercice 3710**

Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

- Soit $X = \frac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :
 $\frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} \cdot X^2 \cdot e^X$
- En déduire la valeur de la limite recherchée.

E. Dérivées :

Exercice 3592

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

a. $f(x) = e^{-x}$

b. $g(x) = x \cdot e^x$

c. $h(x) = e^{x^2+x}$

d. $j(x) = \frac{1}{1 - e^x}$

Exercice 3612

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x \cdot e^{x+1}$

b. $g(x) = e^{x^2+1}$

c. $h(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{3x+1}$

d. $j(x) = \frac{e^{x+1}}{2 \cdot x + 1}$

e. $k(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$

f. $\ell(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$

Exercice 5140

Dans le tableau ci-dessous, sont données des fonctions et l'expression de leurs dérivées. Vérifier l'exactitude de ce tableau :

$f(x)$	$f'(x)$
$3x \cdot e^{5x^2+3}$	$(30x^2 + 3) \cdot e^{5x^2+3}$
$e^{3-x^2} \cdot e^{x^2+1}$	0
$\frac{e^{2-x^2}}{2x}$	$-\frac{(2x^2 + 1)e^{2-x^2}}{2x^2}$
$e^{x\sqrt{x}}$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{x\sqrt{x}}$
$\frac{2x}{e^{2-x}}$	$\frac{4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{2x}{2-x}}$

F. Etudes de fonctions :

Exercice 3643

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites

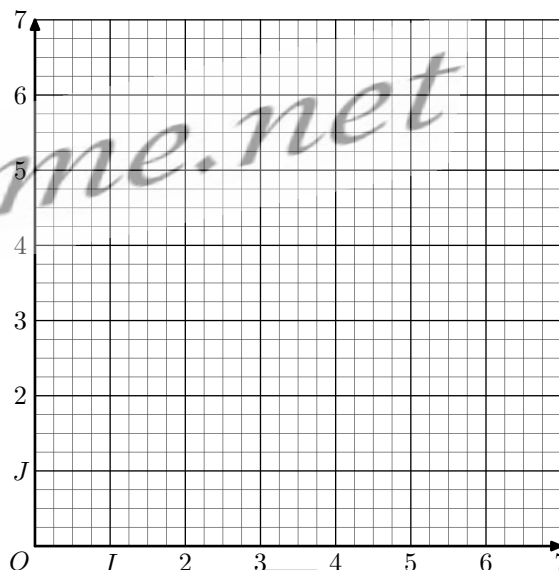
- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Etude des variations de la fonction f .

- Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$
- Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



Exercice 3677

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$$

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = 3 \cdot e^{-2x} \cdot \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right).$$

- Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
- Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.

- b. En combien de points la courbe $\mathcal{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses ? Donner les valeurs approchées des coordonnées de ces points d'intersection.

5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3665

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

- Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$
- Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
 - Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Démontrer que pour tout réel x , $0 < f(x) < 4$.

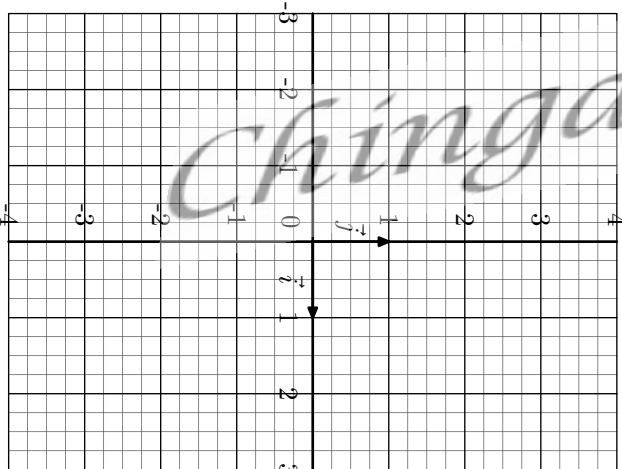
Exercice 3618

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Etablir le tableau de variation de la fonction f .
- Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exercice 3666

Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation :

$$(E) : e^{2x} + 4 \cdot x \cdot e^x - 4 \cdot e^x - 4 = 0$$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4 \cdot x \cdot e^x - 4 \cdot e^x - 4.$$

- Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty ; 0[$: $e^{2x} - 4 < 0$ et $4 \cdot e^x(x - 1) < 0$
- En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty ; 0[$.
- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$
- Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

Exercice 3904

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x \cdot e^x + 1$.

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Etudier les variations de la fonction g .
- Donner le tableau de variations de g .
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
 - A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

- Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie 1.
- En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 107

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \cdot e^{x-1} + 1$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère ortho-normé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1) \cdot e^{x-1}$
- Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

- On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
Donner une équation de T_a .
- Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si, et seulement si, a vérifie l'égalité : $1 - a^2 \cdot e^{a-1} = 0$
- Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.
Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ de l'équation.
 $1 - x^2 \cdot e^{x-1} = 0$
- Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Z. Pas encore classés :



Exercice 1255

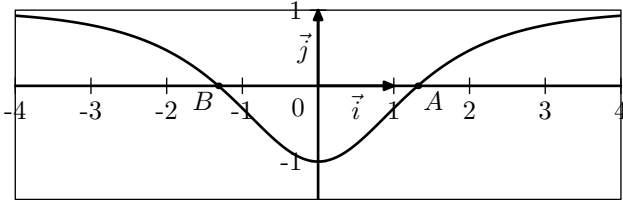


Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{4 \cdot e^x}{e^{2 \cdot x} + 1}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B .



L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du gra-

phique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- a. Vérifier que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4 \cdot e^x \cdot (e^{2 \cdot x} - 1)}{(e^{2 \cdot x} + 1)^2}$$

- b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

Démontrer que cette conjecture est vraie.

(Question hors programme 2012)

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

- a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation :
$$x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$$

En déduire la valeur exacte de a .

- b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Chingatome.net