

Suites

A. Rappels :

Exercice 3395

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite (u_n) .

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 3396

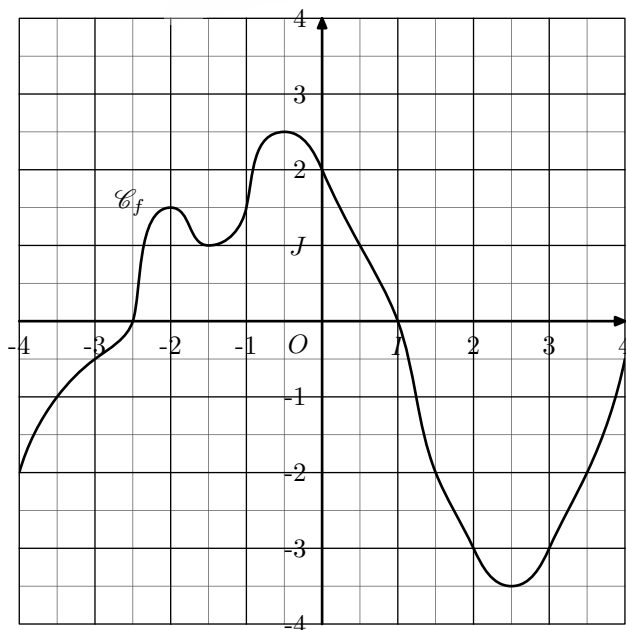
Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\sum_{i=0}^7 i$ b. $\sum_{i=3}^8 i^2 - i$ c. $\sum_{i=0}^7 (i - 4)$

d. $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{i}$ e. $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i^2}$ f. $\sum_{\ell=0}^3 \left[\sum_{i=0}^{\ell} i \right]$

Exercice 3397

On considère la fonction f définie sur $[-4; 4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3 .

2. Justifier les égalités suivantes :

a. $u_2 = -0,5$ b. $u_3 = 2,5$

3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

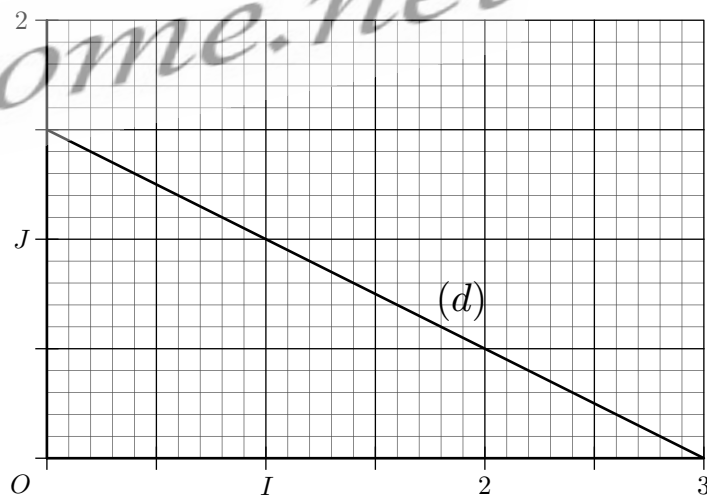
Exercice 3411

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite (les constructions doivent être laissées).

2. Par le calcul, déterminer les valeurs exactes des cinq premiers termes de cette suite.

Exercice 3430

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

2. Peut-on conjecturer une minoration de la suite (u_n) pour les termes de rang supérieur ou égal à 2.

□ **Exercice 5042**

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_{n+1} = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. $u_0 = 3$; $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d. $u_0 = -1$; $u_n = \frac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

B. Rappels : suites arithmétiques et géométriques :

□ **Exercice 3393**

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Déterminer la valeur de la suite suivante :
 $S = u_5 + u_6 + \dots + u_{12}$

□ **Exercice 3394**

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Déterminer la valeur de la suite suivante :
 $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{16}$

□ **Exercice 5012**

1. Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n \in \mathbb{R}$. On a la valeur des deux termes suivants :
 $u_4 = 3$; $u_7 = 15$
 - a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n) .

2. Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n \in \mathbb{R}$. On a la valeur des deux termes suivants :

$v_2 = 2$; $v_5 = 54$

- a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n) .
- b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n) .

□ **Exercice 3398**

En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \dots + (-28)$

b. $27 + 3 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \dots + \frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{24}}$

□ **Exercice 3807**

On considère la suite (p_n) dont les six premiers termes vérifient :

- Les six premiers termes sont tous positifs et leur somme vaut 1.
- Les six premiers termes de la suite sont non-constants.
- Les six premiers termes de (p_n) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Les nombres p_1, p_2, p_4 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Déterminer la valeur des six premiers termes de la suite (p_n) .

C. Raisonement par récurrence : introduction :

□ **Exercice 3437**

1. Soit (u_n) est une suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = \frac{2 \cdot n}{n+1}$$

Donner l'expression simplifiée des termes u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n .

2. Soit (v_n) une suite dont le terme de rang n s'écrit en fonction de n :

$$v_n = 3^{n-1} + 4^{n+1}$$

Donner une expression des termes v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de n .

3. Pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$$

Donner l'écriture de cette identité au rang $(n+1)$.

□ **Exercice 5033**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -3 ; u_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{u_n}{2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la valeur du terme de rang 1 de la suite (u_n) .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 2$$



Exercice 4307



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + 1$$



Exercice 3292



On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$



Exercice 3428



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot u_n - 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Etablir que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq 3$$

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

D. Raisonnement par récurrence :



Exercice 3423



On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$w_0 = 1 \quad ; \quad n \cdot w_n = (n+1) \cdot w_{n-1} + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Compléter le tableau de valeurs de la suite (w_n) ci-dessous :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1						

- Faire une conjecture quant à la nature de la suite (w_n) .
- Ecrire la relation de récurrence donnant $n \cdot w_n$ pour le rang $(n+1)$.
- Etablir, par un raisonnement par récurrence, que la suite (w_n) est arithmétique; on précisera les éléments caractéristiques de cette suite.



Exercice 3438



Pour $x \neq 1$, montrer que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$



Exercice 3425



Etablir la propriété suivante, à l'aide d'un raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Exercice 3295



On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2u_n = 5^{n+2} + 3.$$

E. Raisonnement par récurrence et problèmes :



Exercice 3420



On définit :

- la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

- Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
- Calculer S_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (S_n) .



Exercice 3708



1. Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2 \\ v_n = 2^{u_n} \end{cases}$$

- Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Déterminer ses éléments caractéristiques.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\text{Etablir la limite suivante : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{8}{3}$$

2. On définit la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 0 \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
$$x_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{3}{2^n}$$
- En déduire une expression simple de x_n en fonction de

n .

c. Déterminer la limite de la suite (x_n) .

Exercice 5034

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2 \cdot u_n}$$

b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence,

que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq \sqrt{2}$$

2. a. Dédurre des questions précédentes l'encadrement :

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$$

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$$

3. a. Donner une valeur approchée de $|u_0 - \sqrt{2}|$ au millièmème près.

b. Quel conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) .

F. limites de suites :

Exercice 2555

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$

b. $u_n = \frac{n - 3}{n^2 + 1}$

c. $u_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1}$

d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

Exercice 2558

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$

b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$

c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$

e. $\frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

G. Limites de sommes :

Exercice 2588

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{2}{5}$:

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

2. a. Déterminer l'expression de la somme des n premiers termes de cette suite en fonction de n .

b. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Exercice 2621

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

On considère la somme R_n définie, pour $n \leq 2$ par :

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$$

Déterminer la limite R_n .

Exercice 3583

On définit les suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2 \cdot u_n} \\ v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = v_n^2$. En déduire la relation $v_n = v_0^{(2^n)}$, pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer que $v_0 = \frac{-1}{(2 + \sqrt{5})^2}$ et en déduire la majoration

$$|v_0| \leq \frac{1}{16}.$$

Déterminer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$, puis celle de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2560

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.

Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

1. Calculer les distances d_1 , d_2 , d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Quelle est précisément la nature de la suite ? Déterminer la valeur de d_n en fonction de n .

3. On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.

$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n .

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner ?

c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km

H. Théorème des gendarmes :

□ Exercice 2554

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par la relation explicite :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n - 1}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .

2. Etablir l'encadrement suivant :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{3n-1}{2n-1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$$

3. En déduire la valeur de convergence de (u_n) .

□ Exercice 2567

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :

$$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}$$

2. Etablir l'encadrement suivant :

$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

□ Exercice 2587

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie explicitement par la formule :

$$v_n = \frac{3}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{4n^2+2}} + \dots + \frac{3}{\sqrt{4n^2+n}}$$

1. Comparer les deux termes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{4n^2+1}} \quad \text{et} \quad \frac{3}{\sqrt{4n^2+n}}$$

2. Déterminer que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

□ Exercice 3441

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

2. En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

I. Convergence de suites monotones :

□ Exercice 3418

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

□ Exercice 3416

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot u_n \cdot (20 - u_n)$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot x \cdot (20 - x)$$

a. En déduire que pour tout $x \in [0; 20]$, $f(x) \in [0; 10]$.

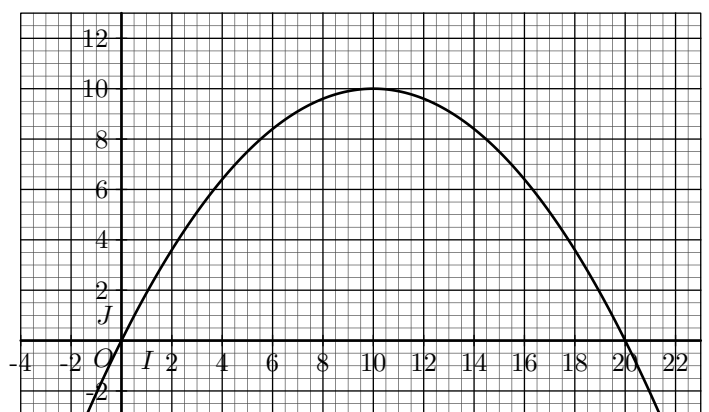
b. On donne en annexe la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.



□ Exercice 5053

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $f(x) \in [0; 2]$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2} ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir la convergence de la suite (u_n) .



Exercice 5080



Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

u_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{n}$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1 .

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

J. Divergence de suites monotones :



Exercice 3442



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

2. a. Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_n > n^2$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

K. Suites arithmético-géométrique :



Exercice 3399



On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n en fonction du rang n .

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

L. Suites homographiques :



Exercice 3517



Une suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 ($a < b$) pour lesquelles la suite est constante.
2. a. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de U_n .

b. Dans ces conditions, calculer :

$$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n - a}{U_n - b}$$

3. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.

b. Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini. En déduire celle de U_n .

M. Autres études de suites :



Exercice 2620



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme est 0 définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot u_n - 3 \cdot n - 8 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = u_n + 5n + 5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire la formule explicite de la suite (u_n) d'un terme en fonction de n son rang.

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .



Exercice 3515



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} ; \quad u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 8 \cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 En déduire s_n en fonction de n .
3. a. On pose $v_n = (-1)^n \cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 Exprimer t_n en fonction de s_n .
 b. Quel est la nature de la suite (v_n) .

4. a. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n (on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \dots + t_{n-1}$).
- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$.



Exercice 3285



On définit la suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$

1. Par transformation successive, établir l'égalité suivante :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n.$$
2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n .

N. Suites et fonctions :



Exercice 3519



On se propose de montrer que les relations :

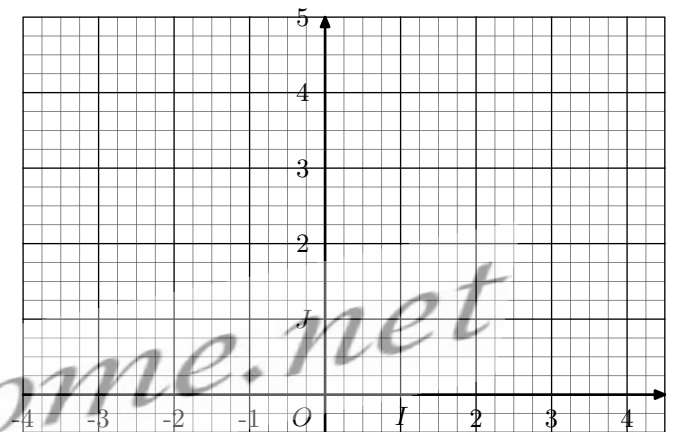
$$u_0 = -3 ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2 \cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; \frac{9}{2} [$ par :

$$f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}$$
 On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .
 a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
 Citer les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_f$.
 b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
 En déduire le tableau de variation de la fonction f .
 c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
 d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-

dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



- e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .
2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 1$.
3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge.
 (On ne demande pas la valeur de la limite)

O. Un peu plus loin : raisonnement par récurrence :



Exercice 3439



Montrer, par un démonstration par récurrence, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^n k$$



Exercice 3478



Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$