

CHAPITRE

tion exponentielle



croissance
exponentielle.

de la po-
cellules *She-*

Une croissance exponentielle s'exprime en mathématiques :

- pour un phénomène discret sous forme d'une suite géométrique
- pour un phénomène continu sous forme d'une fonction exponentielle

On démontre qu'une croissance exponentielle conduit la taille de la population à croître de plus en plus vite vers $+\infty$. Ci-contre des *wanella putrefaciens* à la surface de particules d'hématites

1 Fonction exponentielle



Résultat préliminaire.

Si, pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction φ est dérivable

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = f(x) - f(-x)$$

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(-x) = f(x) - [-f(-x)]$$

$$\varphi'(x) = f(x) - f(-x) - f(x) - f(-x)$$

$$\varphi'(x) = 0.$$

La fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$, or $\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0$, donc pour tout réel

x , $\varphi(x) = 0$. D'où $f(x) - f(-x) = 0$, et finalement pour tout réel x , $f(x) = f(-x)$.

Remarque. On en déduit aussi que pour tout réel x , $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Il existe une unique fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée **exp**.

Démonstration.

- L'existence de la fonction exponentielle est admise.

- **Unicité**

Si g est une fonction telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, la fonction $h = \frac{g}{f}$ est définie (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cf. prop.1) et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $h' = \frac{g'f - g f'}{f^2} = \frac{gf - g f}{f^2} = 0$ et donc h est constante.

Pour tout réel x , $h(x) = h(0) = 1$ c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ et donc $f = g$.

La fonction exponentielle $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Démontrons par l'absurde que pour tout réel x , on a $\exp(x) > 0$.

Supposons qu'il existe un réel a tel que $\exp(a) < 0$.

On sait de plus que $\exp(0) = 1$ et que la fonction exponentielle est continue (car

dérivable) donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel b compris entre a et 0 tel que $\exp(b) = 0$.

On obtient une contradiction avec la Propriété 1 par conséquent pour tout réel x ,

$\exp(x) > 0$.

Merci d'évaluer Wondershare PDF Converter 4.0.5.

Avec la version d'essai, vous pouvez seulement convertir 5 pages au maximum.

Pour obtenir la version complète, veuillez commander le programme depuis :

<http://cbs.wondershare.com/go.php?pid=1431&m=db>

