

EXERCICE 1 : (3pts)

A- ARITHMETIQUE

- 1- a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929.
- b) Trouver les couples (a ; b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation $x^2 - 91x + 588 = 0$
- 2- Démontrer que $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

EXERCICE 2 : (5,25pts)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$

- 1-a) Justifier que tout entier naturel n, a_n est impair.
- b) déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n
- c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1[8]$
- 2-a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ alors $x \equiv 257[1000]$
- b) Montrer pour tout $n > 3$, $a_n \equiv 257[1000]$
- c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?
- 3-a) vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
- b) Soit d le PGCD $(a_{2n} ; a_{2n+1})$. Montrer que $d \neq 7$
- c) Trouver alors d.

EXERCICE 3 : (2,5pts)

Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

- a) $\sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$
- b) $\sum_{k=1}^n k \cdot 5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

EXERCICE 4 : (3,75pts)

1. On considère X et Y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$
 - a) Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence de solutions à l'équation (E)
 - b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) et en déduire une solution particulière de l'équation $(E') : 91x + 10y = 412$
 - c) Résoudre (E')
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E'') : A_3X + A_2Y = 3296$
 - a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation (E'')
 - b) Résoudre (E'')

B- GEOMETRIE

(5,5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2a.

1. Soit H le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que : $\vec{AC} = 2\vec{DA}$. Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (B,3), (H, -6) et (C, 1).
2. Soient les points I et J milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.
 - a. Vérifier que : $2HB^2 - HD^2 + HI^2 - 2HJ^2 = -2a^2$
 - b. Justifier que pour tout point M du plan, $2\vec{MB} - \vec{MD} + \vec{MI} - 2\vec{MJ} = \vec{AB}$
3. Soit (Δ) l'ensemble des points M tels que : $2MB^2 - MD^2 + MI^2 - 2MJ^2 = -2a^2$
 - a) Démontrer que : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{HM} = 0$
 - b) En déduire puis construire l'ensemble (Δ)
4. On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $3MB^2 - 6MH^2 + MC^2 = 6a^2$
 - a) Justifier que $H \in (\Gamma)$
 - b) En déduire puis construire (Γ)
5. On note K l'autre point d'intersection de (Γ) et (Δ)
 - a) En utilisant la question (4) démontrer que : $KH = a\sqrt{3}$
 - b) En déduire KH puis la nature du triangle KBA