

**Professeur : RACHID FANIDI**

**L'année Scolaire :2025-2026**

**Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit**

**Limites et Continuité**

**Série 01**

**2BAC SMF**



### EXERCICE 01

1) Calculer les limites suivantes :

$$a- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$b- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}$$

$$c- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{2007} - 1}{x}$$

$$d- \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$e- \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+12} - \sqrt{x-2}}$$

$$f- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + \sqrt{x})\sqrt{2-x} - 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 6}$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$a- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2 - x - 2}$$

$$b- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$c- \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) E\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$d- \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$e- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sqrt{\tan x} - \sin x \sqrt{\sin x}}{x\sqrt{x}}$$

3) a- Calculer les limites :  $\lim_{t \rightarrow -\infty} tE(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} tE(t)$ .

b- En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}$$

4) Soit  $a \in \mathbb{R}$  ;  $b \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , Calculer les limites suivantes :

$$a- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$$

$$b- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$$

$$c- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{\sin(x-1)}$$

$$d- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$$

$$e- \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + a - x}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f- \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \times \cos(2x) \times \dots \times \cos(nx)}{x^2}$$

### EXERCICE 02

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$I_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos^2(2x) \dots \cos^n(nx)}{x^2}$$

1) Calculer  $I_1$  et  $I_2$ .

2) a- Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}) : I_n - I_{n-1} = -\frac{n^3}{2}$ .

b- En déduire en fonction de  $n$  la limite  $I_n$ .

### EXERCICE 03

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on considère la fonction  $f_n$  définie

$$\text{par : } f_n(x) = \frac{(1 - \sin x) \times (1 - \sin^2 x) \times \dots \times (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

a- Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k t}{1 - \cos^2 t} = \frac{k}{2}$ .

b- En déduire que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f_n(x) = \frac{n!}{2^n}$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$  et on pose :

$$g_n(x) = \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt[3]{\cos x} - 1) \dots (\sqrt[n]{\cos x} - 1)}{x^{2n-2}}$$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x)$ .

### EXERCICE 04

1) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^3 + 3}{x+1}; x \neq -1 \\ f(-1) = 12 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = -1$

2) On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

a- Etudier la continuité de  $g$  en  $x_0 = 3$ .

b- Etudier la continuité de  $g$  en  $x_1 = 2$ .

3) Étudier la continuité des fonctions suivantes en 0 :

$$a- \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - a^2 + \sqrt{x+a}}{x}; x \geq -a; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^+$$

$$b- \begin{cases} g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{x}}; x > 0 \\ g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right); x < 0 \end{cases}$$

$$c- \begin{cases} h(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right); x < 0 \\ h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}}; x > 0 \end{cases}$$

$$d- \begin{cases} k(x) = \operatorname{Arctan} x \cdot \sin\left(1 + \frac{1}{x}\right); x < 0 \\ k(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right); x > 0 \end{cases}$$

### EXERCICE 05

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sqrt{1 + \left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) a-Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

b-En déduire que  $f$  est continue à droite en  $x_0 = 0$ .

2) a-Montrer que pour tout  $x \in [-1; 0[$  :

$$-\sqrt{1+x^2} < f(x) \leq -\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

b-En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

3) La fonction  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 0$  ?

### EXERCICE 06

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \cos x}{x}; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{1-x}}{x+2}; x \leq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer  $D_f$ .

2) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ .

3) a-Montrer que  $(\forall x \in ]0; +\infty[) : |f(x)| \leq \frac{3}{x}$ .

b-Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

### EXERCICE 07

Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

$$\text{On pose } f_n(x) = \frac{(1+ax)^n - (1+ax)}{x^2}.$$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ .

2) a-Vérifier que  $f_{n+1}(x) = (1+ax)f_n(x) + na^2$ .

b-Montrer que :  $(\forall n \geq 2); \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \frac{n(n-1)a^2}{2}$ .

3) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1+47x)^{43} - (1+43x)^{47}}{2x^2}; x \neq 0 \\ f(0) = l \end{cases}$$

Déterminer le réel  $l$  pour que la fonction  $f$  soit continue en 0.

### EXERCICE 08

1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2}; x < 1 \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1}; x > 1 \end{cases} \quad \text{et } f(1) = \frac{2+c}{3}$$

Déterminer les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la fonction  $f$  soit continue en  $x_0 = 1$ .

2) On considère la fonction  $f_n$  définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2}; x < 2 \\ f_n(x) = \frac{3x+b}{4}; x > 2 \end{cases} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f_n$  soit continue en  $x_0 = 2$ .

3) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{x^4 + 4} - (ax^2 + b) + \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}; x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  soit continue en  $x_0 = 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

### EXERCICE 09

La fonction  $f$  admet-elle un prolongement par continuité en  $x_0$ , dans les cas suivants puis déterminer ce prolongement si il existe ?

1)  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{x - 4}$  et  $x_0 = 4$ .

2)  $f(x) = \frac{x\sqrt{3-x}}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$  et  $x_0 = 0$ .

3)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$  et  $x_0 = 1$ .

4)  $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$  et  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

5)  $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$  et  $x_0 = 0$ .

### EXERCICE 10

1) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{mx^2 - mx}{x^2 - 3x + 2}; x > 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} + x - 2}; x < 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $m$  pour que la fonction  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x_0 = 1$ .

2) On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = (x^2 - ax + 1) \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right) \text{ tel que } a \in \mathbb{R}.$$

a-Déterminer  $D_g$ .

b-Déterminer la valeur de  $a$  pour que la fonction  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x_0 = 3$ .

3) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\begin{cases} h(x) = \sin(x) \cdot E\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

a-Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left| h(x) - \frac{\sin x}{x} \right| \leq |\sin x|$

b-En déduire que  $h$  admet un prolongement par Continuité en  $x_0 = 0$  puis déterminer ce prolongement.

### EXERCICE 11

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{n - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n}{x - 1} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que  $f$  admet un prolongement par Continuité

En  $x_0 = 1$  puis déterminer ce prolongement

### EXERCICE 12

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sin\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right); x < 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}; x \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer  $D_f$ .

2) Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .

### EXERCICE 13

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - a}{|x + 1| - 1}; x > 0 \\ f(0) = c \\ f(x) = \frac{bx + 1}{x - 1}; x < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer  $D_f$ .

2) Déterminer les réels  $a; b$  et  $c$  pour que la fonction  $f$  soit continue sur  $D_f$ .

## EXERCICE 14

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + a + 1; x \leq -a \\ f(x) = \frac{4x}{2x+1}; x > -a \end{cases}$$

1) Déterminer  $D_f$  suivant  $a$ .

2) On suppose  $a < 0$ .

a- Étudier la continuité de  $f$  sur  $]-\infty; -a[$  et  $]-a; +\infty[$ .

b- Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  (On donne  $(t-1)^2(t+2) = t^3 - 3t + 2$ ).

## EXERCICE 15

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}; x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \\ f(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi \sin(x-1)}{x-1}\right); x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2) Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## EXERCICE 16

Soit  $f$  une fonction numérique définie par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , déterminer une expression de  $f(x)$  pour tout  $x \in [n; n+1[$  et pour tout  $x \in [n-1; n[$ .

2) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = n$  tel que  $n \in \mathbb{Z}$ .

3) Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## EXERCICE 17

1) Montrer que l'équation  $\sin x = x^2$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2) a- Montrer que l'équation  $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \cos(\pi x)$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ .

b- En utilisant la méthode de dichotomie trouver un autre encadrement de  $\alpha$  de longueur 0,25.

3) a- Montrer que l'équation  $-x^3 + x + 1 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

b- Vérifier que  $\alpha \in ]1; 2[$ .

c- En déduire que  $\alpha = \sqrt[3]{\alpha+1}$ .

## EXERCICE 18

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

2) a- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}$ .

b- Déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} f(E(x))$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x)$ .

## EXERCICE 19

1) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  telles que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) < 1$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 1$ .

On suppose que  $f$  et  $g$  sont continue sur  $\mathbb{R}$  et ils existent deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $a < b$ ;  $f(a) = a$   $g(b) = b$  et  $ab > 0$ .

Montrer que :  $\exists c \in ]a; b[$  tel que  $f(c) \cdot g(c) = c$ .

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  tel que  $f(a) < ab$  et  $f(b) > b^2$ .

Montrer que :  $\exists c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = bc$ .

3) Soit  $(p; q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  $f(0) \neq f(1)$ .

Montrer que :  $\exists x_0 \in ]0; 1[$  tel que  $f(x_0) = \frac{pf(0) + qf(1)}{p+q}$

4) Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  Tel que  $f(a) < 0$ .

Montrer que  $\exists x_0 \in ]a; b[$  tel que  $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$ .

## EXERCICE 20

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques continue sur un intervalle  $[a; b]$  telles que :  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq g(x)$

Soit  $\lambda \in [0; 1]$  et on suppose qu'ils existent  $\alpha$  et  $\beta$  de  $[0; 1]$  tels que  $f(\alpha) = \alpha$  et  $f(\beta) = \beta$ .

On pose  $h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$  pour tout  $x \in [a; b]$  Montrer que  $\exists c \in [a; b]$  tel que  $h(c) = c$ .

### EXERCICE 21

1) Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$   
Et  $p$  et  $q$  deux réels tels que  $pq \geq 0$ .

Montrer que :

$$(\exists c \in [a; b]) : pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques continue sur un intervalle  $[a; b]$  telles que :  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) > g(x)$

Montrer que :

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+) \text{ tel que } (\forall x \in [a; b]) : f(x) \geq g(x) + \lambda$$

3) Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$

Et  $x_1; x_2; \dots; x_n$   $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) éléments de  $[a; b]$ .

Montrer que :  $(\exists c \in [a; b])$  tel que  $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

### EXERCICE 22

1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^4}$$

Montrer que :  $\exists! \alpha \in ]0; 1[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrer que :  $\exists c \in ]0; \pi[$  tel que  $\sum_{k=1}^n \cos(kc) = 0$ .

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq 2$  et  $a_1; a_2; \dots; a_n$  des éléments de l'intervalle  $[0; 1]$ .

Montrer que :  $(\exists c \in [0; 1])$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c - a_i| = \frac{1}{2}$ .

### EXERCICE 23

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $f$  continue sur  $I$ .

Montrer que si  $f$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f$  garder une signe constante sur  $I$  c'est-à-dire :  
 $((\forall x \in I) : f(x) > 0 \text{ ou } (\forall x \in I) : f(x) < 0)$ .

### EXERCICE 24

1) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que si l'équation  $f(x) = x$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ , alors l'équation  $f \circ f(x) = x$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  (on peut utiliser exercice 21).

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  tel que  $f(a) = f(b)$ .

Montrer que :  $\exists x_0 \in [a; b]$  tel que  $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{b-a}{2}\right)$

### EXERCICE 25

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $[0; 1]$  tel que  $f(0) = f(1)$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction  $f_p$  définie

par :  $f_p(x) = f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x)$ .

1) a-Déterminer  $D_{f_p}$ .

b-Calculer la somme  $\sum_{k=0}^{p-1} f_p\left(\frac{k}{p}\right)$ .

2) En déduire que :  $(\exists c \in ]0; 1[)$  tel que  $f(c) = f\left(c + \frac{1}{p}\right)$

(On peut utiliser le résultat de l'exercice 21)

### EXERCICE 26

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $\mathbb{R}^+$

telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$

Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}^+$ .

### EXERCICE 27

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction numérique telle qu :

>  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

>  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) < x$

1) Montrer que  $f(0) = 0$ .

2) Montrer que pour tous  $a; b \in ]0; +\infty[$  on a :

$$\exists M \in [0; 1[ \text{ tel que } \forall x \in [a; b] : f(x) \leq Mx$$

### EXERCICE 28

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continue sur  $\mathbb{R}$  tels que :

$f(\mathbb{R}) \subset ]-\infty; 1[$  ;  $g(\mathbb{R}) \subset ]1; +\infty[$  et

$\exists (\alpha; \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \alpha < \beta : f(\alpha) = \alpha \text{ et } g(\beta) = \beta$ .

Montrer que  $\exists c \in ]\alpha; \beta[$  tel que  $f(c) \times g(c) = c$

### EXERCICE 29

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x} - 1$$

1) Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$ .

2) Montrer que  $\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] : \alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x.$$

3) Montrer que  $\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  tel que  $\sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$

### EXERCICE 30

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I = [-1; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1.$$

1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 31

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$ .

1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 32

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I = \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$

$$\text{par : } f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x.$$

1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 33

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \sqrt[n]{1+nx} - 1$

Tel que  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $I = \left[-\frac{1}{n}; +\infty\right[$

Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

3) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique dans  $I$ .

### EXERCICE 34

Soit  $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et  $f$  une fonction définie sur  $\left]-a; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{par : } f(x) = \frac{\cos x}{\sin(a+x)}.$$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow (-a)^+} f(x)$ .

2) Étudier les variations de  $f$  sur  $I$ .

3) a-Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 35

Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$

$$\text{Par : } F(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ et on pose } f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

1) Déterminer une fonction  $g$  telle que  $F = g \circ f$ .

2) a-Étudier les variations de  $f$  et  $g$ .

b-En déduire le sens de variations de  $F$ .

3) a-Montrer que  $F$  est bijective de  $I$  vers  $I$  puis déterminer sa réciproque  $F^{-1}$ .

b-Montrer que l'équation  $F(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $I$ .

4) Montrer que  $1 < \alpha < \sqrt[3]{2}$  et  $\alpha = \sqrt[3]{1 + \alpha\sqrt{\alpha}}$ .

### EXERCICE 36

1) a-Montrer que :  $(\forall x > 0); \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Puis en déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \text{Arctan}\left(\left(\frac{1+x^2}{x}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

b-En déduire que :  $(\forall x < 0); \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$> 2\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$> \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$> \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3)a-Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$$

b-En déduire en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$  la somme suivante

$$S_n = \sum_{p=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$$

### EXERCICE 38

1)a-Montrer les égalités suivantes :

$$\text{➤ } \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{➤ } \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{➤ } 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b-En déduire la valeur de :

$$\text{➤ } \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$$

$$\text{➤ } \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8).$$

3)On pose  $\alpha = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$ .

a-Montrer que :  $0 < \alpha < 3$ .

b-Calculer  $\tan(\alpha)$  puis en déduire la valeur de  $\alpha$ .

### EXERCICE 39

1)Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$(E_1): \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{8} \quad (E_2): \operatorname{Arctan}(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4}$$

$$(E_3): \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$$

$$(E_4): \operatorname{Arctan}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) + \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$(E_5): \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2)Calculer les limites suivantes :

$$\text{a- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(2x^2 - x)}{x}$$

$$\text{c- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^3} \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{e- } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$\text{g- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3x^2 + x} - 1}{x^2 + 1}\right) \quad \text{h- } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$\text{i- } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x-1}$$

$$\text{j- } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

### EXERCICE 40

Soit  $a$  et  $b$  deux réels telle que  $ab < 1$ .

1)a-Montrer que :  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(a) + \operatorname{Arctan}(b) < \frac{\pi}{2}$ .

b-En déduire :  $\operatorname{Arctan}(a) + \operatorname{Arctan}(b) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

2)Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$

a-Calculer  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{p+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{p-1}{p}\right)$

b-Calculer en fonction de  $n$  :  $S_n = \sum_{p=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2p^2}\right)$

### EXERCICE 41

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)$

1)Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$ .

2)a-On pose  $t = \operatorname{Arctan}(1-x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

Montrer que :  $f(t) = \operatorname{Arctan}(\tan(2t))$

b-En déduire que :

$$\begin{cases} f(x) = 2 \operatorname{Arctan}(1-x); 0 < x < 2 \\ f(x) = \pi + 2 \operatorname{Arctan}(1-x); x > 2 \end{cases}$$

3)Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 2[$ .

a-Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 42

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$

1)Déterminer  $D_f$ .

2)Montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .

3)a-Montrer que  $f$  une bijection de  $D_f$  Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

c-En déduire que :  $(\forall x \in D_f); f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan} x}$

4)Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$ .

### EXERCICE 43

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

1) On pose  $\sqrt{x} = \tan \alpha$  tel que  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  et  $x \in D_f$ .

a-Vérifier que :  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ .

b-En déduire que  $(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(\sqrt{x})$

c-Résoudre dans  $D_f$  l'équation  $f(x) = \frac{7\pi}{16}$ .

2)a-Montrer que  $f$  une bijection de  $D_f$  Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 44

1)Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{256}} \quad B = \frac{\sqrt[4]{3} \times \sqrt[20]{3} \times \sqrt[4]{9} \times (27)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{243} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$$

2)Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

4)Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$(E_1): \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right) + 125 = 0 \quad (E_3): \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$$

$$(E_2): \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2} \quad (E_4): \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} - 6 = 0$$

$$(E_5): \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2} \text{ (on prend } t = \sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}} \text{)}$$

5)Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$(I_1): \sqrt[3]{4-x} \leq 2 \quad (I_2): \sqrt[3]{x^2+8} - 2 < x$$

$$(I_3): x+1 > \sqrt[3]{x^2+1} \quad (I_4): \sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)} > x-2$$

6)Calculer les limites suivantes :

$$\text{a-} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 2}{x-3} \quad \text{b-} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{1-\sqrt[3]{3-x}}$$

$$\text{c-} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \text{d-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} - x\right)$$

$$\text{e-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3+x^2+1} - mx\right) \quad \text{f-} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\text{g-} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1}} \quad \text{h-} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[5]{x}\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$\text{i-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{x} \left( \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \right) \quad \text{j-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{k-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{l-} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x+1 - \sqrt[3]{x-8x^3} \right)$$

$$\text{m-} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 3} \quad \text{n-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}}$$

### EXERCICE 45

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x}; x \leq 1 \\ f(x) = 2 \text{Arctan} \left( \frac{2}{x+1} - 1 \right); x > 1 \end{cases}$$

1)Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2)Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3)Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

4)a-Montrer que  $f$  une bijection de  $\mathbb{R}$  Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 46

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{2-x}} \right); x < 2 \end{cases}$$

1)Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2)Montrer que  $f$  est continue en 2.

3)Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-\infty; 2[$ .

2)Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty; 2[$ .

a-Montrer que  $g$  une bijection de  $I$  Vers un intervalle  $J$  à déterminer.

b-Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .