

Préparer mon examen national

2^{ème} Bac SM
Nombres complexes

Prof B.LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr Whatsapp 0661969668

Résumé de cours

Thème

Nombres complexes



① L'ensemble des nombres complexes

$$\rightarrow \mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$\rightarrow$ l'écriture $x + iy$ s'appelle l'écriture algébrique de z .

$\rightarrow$ Le réel x est la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$

$\rightarrow$ Le réel y est la partie imaginaire de z , $y = \operatorname{Im}(z)$.

$\rightarrow$ L'ensemble des nombres imaginaires pures est noté $i\mathbb{R}$.

$$+ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$+ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$+ z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

$\rightarrow$ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.

$\rightarrow$ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé l'axe imaginaire.

$\rightarrow$ Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$
+ l'affixe z_I de I milieu du segment (AB) est $z_I = \frac{a+b}{2}$

+ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a = z_B - z_A$.

+ si A et B et C sont distincts
 A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$

$\rightarrow G$ est le barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$z_G = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$$

② Conjugué d'un nombre complexe

$\rightarrow$ Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

le conjugué de z est $\bar{z} = x - iy$.

$$\rightarrow z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$\rightarrow z - \bar{z} = 2iy = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

$$\rightarrow z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$$

$$\rightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$\rightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

$$\rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\rightarrow \forall z, z' \in \mathbb{C}$$

$$\bullet \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}}, \quad z' \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$$

$$\bullet \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$



③ Module d'un nombre complexe.

Soit $M(z)$ avec $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$
le module de z est la distance
on note $|z|$ et on a:

$$|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\rightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z^2|$$

$$\rightarrow |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$\rightarrow \text{si } A(a) \text{ et } B(b)$$

$$AB = |z_B - z_A| = |b - a|$$

$$\rightarrow \forall z, z' \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|, |z^n| = |z|^n$$

$$\bullet \text{ si } z' \neq 0$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$$

$$\bullet |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\rightarrow z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

$$\rightarrow \text{si } A \neq C$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right|$$

$$\triangle |i| = |-i| = |1| = |-1| = 1$$

④ Argument d'un nombre complexe non nul.

Soit $M(z)$ tq $z \neq 0$,

$$\arg(z) \equiv (\vec{u}, \vec{OM}) [2\pi]$$

$$\rightarrow z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\rightarrow z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\rightarrow z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\rightarrow z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\rightarrow \forall z, z' \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z) [2\pi]$$

$$\rightarrow \text{Soient } A(a), B(b), C(c), D(d)$$

$$\bullet \text{ si } A \neq B \quad (\vec{u}, \vec{AB}) \equiv \arg(b - a) [2\pi]$$

$$\bullet \text{ si } A \neq B \text{ et } A \neq C$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) [2\pi]$$

$$\bullet \text{ si } A \neq B \text{ et } C \neq D$$

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$$

$$\bullet A, B \text{ et } C \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\bullet (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\bullet (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$\bullet A, B, C$ et D sont alignés ou cocycliques ($\in$ au même cercle)

$$\Leftrightarrow \frac{d - a}{b - a} \times \frac{b - c}{d - c} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou } \frac{d - a}{b - a} \div \frac{d - c}{b - c} \in \mathbb{R}$$



⑤ Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

→ tout nombre complexe non nul $z = x + iy$ s'écrit sous la forme

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z|$$

$$\text{et } \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\text{et } \theta \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

l'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

s'appelle la forme trigonométrique de z et on écrit $z = [r, \theta]$.

→ Soient $z = [r, \theta], z' = [r', \theta']$

$$\bullet -z = [r, \theta + \pi], \bar{z} = [r, -\theta]$$

$$\bullet z \times z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$$

$$\bullet \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right], \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$\bullet z^n = [r^n, n\theta], n \in \mathbb{N}.$$

→ Formule de Moivre.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

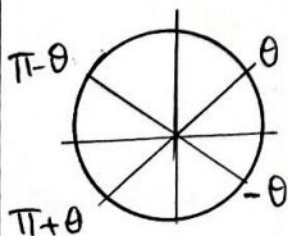
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

→ Des formules importantes

$$\bullet \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$\bullet -\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)$$

$$\bullet -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)$$



$-1 \rightarrow \pi - \theta$	$+1 \rightarrow -\theta$
$-1 \rightarrow \pi + \theta$	$+1 \rightarrow -\theta$

⑥ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

→ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$ et on écrit $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

→ Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle notation exponentielle $re^{i\theta}$, tel que $z = [r, \theta]$ et on écrit $z = re^{i\theta}$

→ $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \forall r, r' \in \mathbb{R}^+$

$$\bullet |re^{i\theta}| = r, \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

$$\bullet \overline{re^{i\theta}} = r e^{-i\theta} = [r, -\theta]$$

$$\bullet -re^{i\theta} = re^{i(\pi + \theta)} = [r, \pi + \theta]$$

$$\bullet re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\bullet \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\bullet (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

→ Formule d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

→ On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(u)$

ou $\sin^n(u)$ ou $\cos^n(u) \cdot \sin^m(u)$

en les transformant en somme

de termes de type $a \cos ku + b \sin ku$

en développant $\left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \right)^n$ ou $\left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \right)^n$.

Exemples

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

À retenir

$$\rightarrow e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})} \left(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} + e^{-i(\frac{\alpha-\beta}{2})} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

$$= \begin{cases} \left[2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \text{ si } \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0 \\ \left[-2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \pi + \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \text{ si } \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})} \left(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})} - e^{-i(\frac{\alpha-\beta}{2})} \right)$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2})}$$

car $i = e^{i\pi/2}$

⑦ Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

$\rightarrow$ Soit $u \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
on dit que z est une racine d'ordre n (ou racine n-ième) de u si :

$$z^n = u$$

$\rightarrow$ Tout nombre complexe $\neq 0$
 $z = r e^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$)

admet n racines n-ièmes qui
sont $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})}$
avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Exemples

• Les racines n-ièmes de l'unité (1)
sont $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

• Les racines cubiques de l'unité (1)
sont 1, $j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ et
 $\bar{j} = e^{-i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Les racines 4-ièmes de l'unité (1)
sont 1, -1, i et $-i$.

• Tout nombre complexe non nul
admet deux racines carrées
opposées.

$\rightarrow$ Autre méthode:

Résoudre l'éq $z^2 = \alpha + i\beta$
c'est déterminer les racines
carrées de $\alpha + i\beta$

$$z^2 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})} = 0$$

$$1 + j + j^2 = 0, \quad j^2 = j, \quad j \cdot \bar{j} = 1$$

$$j^3 = (\bar{j})^3 = 1 \quad \text{avec}$$

$$j = e^{i \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



⑧ L'équation $az^2 + bz + c = 0$
avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$.

• si $\Delta = b^2 - 4ac = d^2$

→ si $\Delta \neq 0$ $S = \left\{ -\frac{b-d}{2a}, -\frac{b+d}{2a} \right\}$

→ si $\Delta = 0$ $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

→ si z_1 et z_2 sont deux solutions
de l'eq. $az^2 + bz + c = 0$ donc

• $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

• $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Autre :

Soit l'eq: $z^2 + az^2 + bz + c = 0$ (E)
avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Montrons que $z_0 = zi$ est solution
de l'équation (E).

Méthode 1: remplacement

Méthode 2: on pose $z_0 = xy$, $y \in \mathbb{R}$
 z_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow z_0$ vérifie

l'eq (E) $\Leftrightarrow A + iB = 0$

$\Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$\Leftrightarrow (y = y_1 \text{ ou } y = y_2) \text{ ou } B = 0$

et on vérifie que l'un des
deux $(y_1 \text{ ou } y_2)$ vérifie B
avec y_1 et y_2 sont solutions de A

→ pour déterminer les autres
solutions de (E), on cherche
une factorisation de la forme
 $(z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$ (E)
avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

⑨ Ecriture complexe des
transformations usuelles.

① Translation

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la
translation T de vecteur $\vec{u}(b)$

$\Leftrightarrow T_u(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z' = z + b$

② $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la
homothétie de centre $\Omega(w)$ et de
rapport k ($k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$\Leftrightarrow h_{(\Omega, k)}(M) = M'$

$\Leftrightarrow \vec{\Omega M'} = k \vec{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z' = k(z - w) + w$

③ $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par
la rotation R de centre $\Omega(w)$ et
d'angle θ $\Leftrightarrow R_{(\Omega, \theta)}(M) = M'$

$\Leftrightarrow \vec{\Omega M} = \vec{\Omega M'}$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi}$

$\Leftrightarrow |z' - w| = |z - w|$ et $\arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) = \theta \pmod{2\pi}$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$.



Résumé

soient $a, b \in \mathbb{C}$ tq $a \neq 0$

soit T la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = az + b$

• si $a = 1$ alors T est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .

• si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, alors T est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et de rapport a .

• si $a \in \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors T est la rotation de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et d'angle $\arg(a)$.

• si $a \in \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors T est la composée de la rotation R de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et d'angle $\arg(a)$ et l'homothétie H de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et de rapport $|a|$.

Dans ce cas : $T = R \circ H = H \circ R$.

⑩ Nature d'un triangle

Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan distincts deux à deux.

• si $\frac{b-a}{c-a} = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$ alors

$$|\frac{b-a}{c-a}| = 1 \text{ et } \arg(\frac{b-a}{c-a}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

D'où ABC est rectangle et isocèle en A .

• si $\frac{a-b}{c-b} = \pm i = [1, \pm \frac{\pi}{2}]$ alors

$$AB = |y| \cdot BC \text{ et } (\vec{BC}, \vec{BA}) = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

D'où ABC est rectangle en B .

• si $\frac{a-c}{b-c} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$ alors

$$AC = BC \text{ et } (\vec{CB}, \vec{CA}) = \pm \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

D'où ABC est équilatéral.

⑪ Nature d'un quadrilatère.

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$

• $ABCD$ est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \quad (b-a = c-d)$$

$$\Leftrightarrow (AC) \text{ et } (BD) \text{ ont même milieu} \quad \left(\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \right)$$

• $ABCD$ est un losange

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme et deux cotés consécutifs sont égaux} \quad (\vec{AB} = \vec{DC} \text{ et } AB = AD)$$

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme dont les diagonales sont } (\perp).$$

• $ABCD$ est un carré

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un losange qui a un angle droit } ((\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi))$$

• $ABCD$ est rectangle

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme qui a un angle droit.}$$

Partie énoncé

Thème

Nombres complexes

Exercice 1

Soit α un nombre complexe non nul.

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$.

1)a) Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) .

2) Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

Mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous formes exponentielles.

Partie II : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

On considère Ω, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $\alpha, z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$

et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$. Et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1)a) Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b) En déduire que les triangles OM_1M_2 et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2)a) Vérifier que $z_1 - z_2 = \alpha$

b) Montrer que les deux droites (OM_1) et (OM_2) sont orthogonales.

c) En déduire que OM_1M_2 est un losange.

3) Montrer que tout réel θ le nombre $z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

Exercice 2

Soit m un nombre complexe.

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m): z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1)a) vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m) .

b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m) .

2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs :

$$a = -1 - i \text{ et } \omega = i \text{ et } m \text{ et } m' = -im - 1 + i$$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M' .

a) Vérifier que Ω est le centre de rotation R .

b) Déterminer l'affixe b de B qui vérifie $A = R(B)$.

2)a) vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.

b) En déduire que les points A et M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A et M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 3

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit M le point d'affixe le nombre non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

- 1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.
- 2) On suppose que M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1 .

Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

- 3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Δ) , alors le point M' appartient à (Δ) .

- 4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Γ) , alors le point M' appartient à (AB) .

Exercice 4

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

- 1) a) Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E) .
- b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (z_1 l'imaginaire pur).
- c) Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

- 2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

- a) Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point E , milieu du segment $[AB]$.

- b) Soit R la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et c l'affixe de point C tel que $R(E) = C$

Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

- c) Soit D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$; Montrer que le nombre $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) \cdot \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 5

Soit a un nombre complexe non nul et $\bar{a}$ son conjugué.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue z : $(E_a) : iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$

- 1) a) Vérifier que $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a)
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) .
- 2) Montrer que a est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $Re(a) = Im(a)$.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On suppose que $Re(a) \neq Im(a)$; On considère les points A , B et C d'affixes respectifs a et $i\bar{a}$ et $(1 + ia)$.

- 1) On pose $z = \frac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$

a) Vérifier que $\bar{z} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$.

b) Montrer que les points A , B et C sont alignés si et seulement si $Im(a) = \frac{1}{2}$.

2) On suppose dans cette question que $Im(a) \neq \frac{1}{2}$

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $R_1(B) = B'$ et $R_2(C) = C'$. Soit E le milieu de $[BC]$.

a) Déterminer b' et c' les affixes respectifs des points B' et C' .

b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont orthogonales et que $B'C' = 2AE$.

Exercice 6

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0.$$

1) Vérifier que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E)

2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}): z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

3)a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(5 - 12i)$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie II

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A , B et C d'affixes respectifs

$$a = -1 + 3i \text{ et } b = -2i \text{ et } c = 2 + i$$

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet C .

2) Soit R_1 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Soit M un point du plan d'affixe z On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$.

a) Vérifier que l'expression analytique de la rotation R_1 est : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$.

b) Déterminer z_2 affixe de M_2 en fonction de z .

c) En déduire que I milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe.

Exercice 7

Partie I m un nombre complexe différent de 1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$

$$\text{l'équation : } (E): z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) Déterminer la forme algébrique des deux valeurs de m pour lesquelles le produit des racines de l'équation (E) est égale à 1.

2) On pose : $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

Ecrire z_1 et z_2 sous leur forme trigonométrique lorsque $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Partie II m un nombre complexe différent de 1.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes m et $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2)a) Soit R la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = 1 - iz$.

Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'affixe du centre Ω et une mesure de l'angle.

b) Montrer que le nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est imaginaire pur ssi $Re(m) + Im(m) = 1$.

c) en déduire l'ensemble des points M tels que Ω, M, M_1 , et M_2 soient cocycliques.

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E) \quad z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que le nombre complexe $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E) .

b) Déduire b la deuxième solution de l'équation (E) .

2) a) Montrer que $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Ecrire le nombre a sous la forme trigonométrique.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ) .

b) Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ) .

c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 9

Partie I Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

1) Montrer que $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les solutions de l'éq (E)

2) On pose : $a = e^{i\theta}$ tel que $0 < \theta < \pi$

a) Montrer que : $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

b) En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2 .

Partie II Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On suppose que $Re(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$ et $B(-i)$ et $C(i)$ et $B'(1)$

1) Déterminer les affixes des points J et K les milieux respectifs des $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a .

2) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose : $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'

a) Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

b) Calculer $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$.

Partie correction

Thème

Nombres complexes

Exercice 1

Partie I, soit l'équation (E_α) : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$

1) a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-i\alpha\sqrt{3})^2 - 4(1)(-\alpha^2) = -3i^2\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2$

b) on a d'après ce qui précède $\Delta = \alpha^2$, d'où $\sqrt{\Delta} = \alpha$
on a bien $\Delta \neq 0$ (car $\alpha \neq 0$) donc l'équation admet deux

solutions $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{i\alpha\sqrt{3} + \alpha}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha$

et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{i\alpha\sqrt{3} - \alpha}{2} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha$

2) soit $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

on a $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot |\alpha| \cdot e^{i\theta} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) |\alpha| \cdot e^{i\theta}$
 $= |\alpha| \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\theta} = |\alpha| \cdot e^{i(\frac{\pi}{3} + \theta)}$

et $z_2 = \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot |\alpha| \cdot e^{i\theta} = \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) |\alpha| \cdot e^{i\theta}$
 $= |\alpha| \cdot e^{i2\pi/3} \cdot e^{i\theta} = |\alpha| \cdot e^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})}$

Partie II:

1) a) Soit R la rotation de centre $O(z_0)$ et d'angle $\theta \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

on a $e^{i\pi/3}(z_1 - z_0) + z_0 = e^{i\pi/3} \cdot \alpha$ (car $z_0 = 0$)
 $= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha = z_1$

donc $z_1 = e^{i\pi/3} \cdot z_0$

donc $M_1 = R(z_0)$

de plus $e^{i\pi/3}(z_{M_1} - z_0) + z_0 = e^{i\pi/3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \alpha = e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/3} \cdot \alpha$
 $= e^{i2\pi/3} \cdot \alpha = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \alpha$
 $= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \alpha = z_2$

donc $M_2 = R(M_1)$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

⑥ on a d'après ce qui précède $R_{(0, \pi/3)}(-2) = M_1$

donc $z_1 - z_0 = e^{i\pi/3} (z_2 - z_0)$

donc $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} = e^{i\pi/3} = (1, \pi/3)$

d'où $\left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right) = \pi/3 \ (2\pi)$

donc $OM_1 = OM_2$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \pi/3 \ (2\pi)$

de plus $R(M_1) = M_2$

cà d $OM_1 = OM_2$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \pi/3 \ (2\pi)$

donc les triangles OM_1 et OM_2 sont équilatéraux.

⑦ ① $z_1 - z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha$
 $= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha = \alpha$

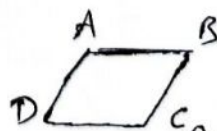
⑥ on a : $\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = \frac{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \alpha - \alpha}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \alpha} = \frac{\alpha \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \alpha} \ (\alpha \neq 0)$
 $= \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$
 $= i\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot e^{i\pi/2}$

donc $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0}\right) = \pi/2 \ (2\pi)$

d'où $(M_1 M_2) \perp (OM_1)$.

③ Rappel

ABCD est un losange



$\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme + $(BD) \perp (AC)$



ou $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$

ou $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme + deux cotés successifs ont la même longueur.

Méthode 1: on a d'après ce qui précède $z_1 - z_2 = \alpha = \alpha - 0$

donc $\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{O\Omega}$

d'où le quadrilatère $O\Omega M_1 M_2$ est un parallélogramme

de plus (OM_1) et (ΩM_2) sont orthogonales.

d'où $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

Méthode 2:

on a les triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux

donc $O\Omega = \Omega M_1 = OM_1$ et $OM_1 = M_1 M_2 = OM_2$

d'où $O\Omega = \Omega M_1 = M_1 M_2 = OM_2$

d'où le quadrilatère $O\Omega M_1 M_2$ est losange.

③ Méthode 1

on a bien $\Omega(\alpha)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ et soit $M(|\alpha|e^{i\theta})$

et comme les triangles $OM_1\Omega$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux

donc $O\Omega = OM_1 = OM_2$

de plus $OM = |\alpha|e^{i\theta} = |\alpha| = O\Omega$

d'où $O\Omega = OM_1 = OM_2 = OM$

donc les points Ω , M_1 , M_2 et M appartiennent au même cercle de centre O et de rayon $|\alpha|$

c'est-à-dire les points Ω , M_1 , M_2 et M sont cocycliques.

donc $\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \div \frac{z_2 - z_M}{z_1 - z_M} \in \mathbb{R}$

c'est-à-dire $\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}} \in \mathbb{R}$ C.Q.F.D.

Méthode 2 on calcule le rapport $\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$

Exercice 2

Partie I : soit l'équation $(E_m): z^2 + (im + 2)z + 2 - m = 0$.

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad \Delta &= b^2 - 4ac = (im + 2)^2 - 4(im + 2 - m) \\ &= -m^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\ &= -m^2 + 4m - 4 = -(m^2 - 4m + 4) \\ &= i^2 (m - 2)^2 = (im - 2i)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Autre} \quad \Delta &= b^2 - 4ac = (im + 2)^2 - 4(im + 2 - m) \\ &= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\ &= (im)^2 + 4m - 4 = (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2 \\ &= (im - 2i)^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \text{ on a bien } \Delta = (im - 2i)^2 = d^2 \quad | \quad d = im - 2i$$

si $m = 2$ alors $\Delta = 0$

$$\text{donc } z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{im + 2}{2} = -(1 + i)$$

si $m \neq 2$ alors $\Delta \neq 0$

$$\text{donc } z_1 = \frac{-b + d}{2a} \quad \text{et } z_2 = \frac{-b - d}{2a}$$

$$= \frac{-(im + 2) + (im - 2i)}{2} = -(1 + i)$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-(im + 2) - (im - 2i)}{2} = -1 + (1 - m)i$$

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \text{ on a } z_1 &= -1 - i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{et } z_2 = -im - 1 + i = -i(i\sqrt{2}) - 1 + i = \sqrt{2} - 1 + i$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} e^{i0} + \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(e^{i0} + e^{i \frac{3\pi}{4}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(e^{i \left(0 + \frac{3\pi}{4} \right)} \right) \left(e^{\frac{i(0 - \frac{3\pi}{4})}{2}} + e^{\frac{-i(0 - \frac{3\pi}{4})}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{8}} \cdot 2 \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{i \frac{3\pi}{8}}$$

et comme $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$

$$\text{donc } z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{i \frac{3\pi}{8}}.$$

Remarque : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ on se basant à $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

Partie II :

① a) Méthode 1 : on a $R(M) = M'$

$$\Leftrightarrow m' - w = e^{-i\pi/2} (m - w)$$

$$\Leftrightarrow -im - 1 + i - w = -i(m - w)$$

$$\Leftrightarrow -w + iw = -im + im + 1 - i$$

$$\Leftrightarrow w(-1-i) = 1-i$$

$$\Leftrightarrow w = -\frac{1-i}{1+i} = -\frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{2i}{2} = i$$

Méthode 2 on a $m' = -im - 1 + i$

$$\Leftrightarrow m' - i = -im - 1 = -im + i^2$$

$$\Leftrightarrow m' - i = -i(m - i)$$

$$\Leftrightarrow m' - w = e^{-i\pi/2} (m - w)$$

donc $\Omega(i)$ est le centre du rotation R .

② a) $A = R(B)$ $\Leftrightarrow a - w = e^{-i\pi/2} (b - w)$

$$\Leftrightarrow -1 - i - i = -i(b - i)$$

$$\Leftrightarrow ib = 1 + i + i - 1 = 2i$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

② a) on a $m' - a = -im - 1 + i - (-1 - i)$

$$= -im - 1 + i + 1 + i = -im + 2i$$

$$\text{d'autre part } \frac{w-a}{w-b} (m-b) = \frac{i - (-1-i)}{-2-i} (m-2)$$

$$= \frac{(1+2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} (m-2) = \frac{-i(m-2)}{5} = -im + 2i$$

donc $m'-a = \frac{w-a}{w-b} (m-b)$.

Autre méthode : on $A \neq B \Rightarrow a-i = e^{-i\pi/2} (b-i)$
 $\Rightarrow \frac{b-w}{a-w} = -i$

(b) A, B, C et M sont cocycliques

$\Rightarrow \frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{m'-a}{m-b} \times \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R}$ (car $m'-a = \frac{w-a}{w-b} \cdot (m-b)$)

$\Rightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A, M et M' sont alignés.

(c) Méthode 1

d'après ce qui précède A, M et M' sont alignés

$\Rightarrow$ A, B, C et M sont cocycliques.

$\Rightarrow \frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -i \cdot \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R}$ (car $\frac{w-a}{w-b} = -i$)

$\Rightarrow \frac{m-b}{m-a} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ les points, A, B et M forment un triangle rectangle en M

$\Rightarrow M \in$ Cercle dont l'un des diamètres est (AB)

donc l'ensemble des points M est un cercle de centre I milieu de (AB) ($z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$) et de

rayon $R = \frac{AB}{2} = \frac{|z_A - z_B|}{2} = \left| \frac{3-i}{2} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Méthode 2

 A, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{-im+2i}{m+i+1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-i(x+iy)+2i}{x+iy+i+1} \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{avec } m = x+iy \\ \text{et } x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+i(2-x)}{x+1+i(y+1)} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+i(2+x))(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2+(y+1)^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} \left(\frac{(y+i(2+x))(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2+(y+1)^2} \right) \in 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2-x) - y(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in \mathcal{C} \left(-R \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), R = \frac{\sqrt{10}}{2} \right).$$

Exercice 3

① M et M' sont confondus $\Leftrightarrow z' = z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = z \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1}$$

$$= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} = \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

$$= \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2.$$

③ Rappel : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment.
 (cet ensemble est la droite passant par le milieu du segment et qui est perpendiculaire au segment).

$$M \in (\Delta) \Rightarrow AM = BM$$

$$\Rightarrow |z+1| = |z-1|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1 \quad (z \neq +1) \text{ et } (z \neq -1)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z'+1}{z'-1} \right| = 1 \Rightarrow |z'-1| = |z'+1|$$

$$\Rightarrow AM' = BM' \Rightarrow M' \in (\Delta).$$

④ $M \in (T) \Rightarrow$ le triangle ABM est rectangle en M

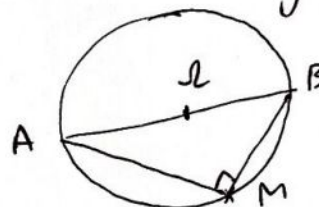
$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z'-1} \in i\mathbb{R}$$

$\Rightarrow A, B$ et M' sont alignés

$$\Rightarrow M \in (AB).$$



$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 2i \\ (1-i)^2 &= -2i \end{aligned}$$

Exercice 4

soit l'équation (E): $z^2 - (1+i)z + 2+2i = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{a} \quad \Delta &= b^2 - 4ac = (-(1+i))^2 - 4(2+2i) \\ &= 2i - 8 - 8i = -8 - 6i = 1 - 2(1)(3i) - 9 \\ &= 1 - 2(1/3i) + (3i)^2 = (1-3i)^2 \end{aligned}$$

b) on a $A = (1-3i)^2 = d^2$ avec $d = 1-3i$
 donc $z = \frac{-b-d}{2a} = \frac{1+i-(1-3i)}{2} = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i$
 on $z = \frac{-b+d}{2} = \frac{1+i+(1-3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

et comme $z_1 \in i\mathbb{R}$ donc $z_1 = 2i$ et $z_2 = 1-i$

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{2e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}$
 $= \frac{2e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Autre méthode: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2}$
 $= \sqrt{2} \left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

9) a) E est le milieu du segment [AB]

donc $e = aff(E) = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2i + 1 - i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b) on a $R_{(A, -\frac{\pi}{2})}(E) = C$

$\Rightarrow z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_A)$

$\Rightarrow C - z_1 = -i(e - z_1) \quad (e^{-i\pi/2} = -i)$

$\Rightarrow C = -i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 2i\right) + 2i$

$\Rightarrow C = -\frac{1}{2}i - \frac{3}{2} + 2i = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1} = \left(\frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-1-\frac{3}{2}i} \right) \times \left(\frac{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i-2i}{1-i-2i} \right)$

$\stackrel{\text{juste calcul}}{=} \left(-\frac{i}{2} \right) \left(\frac{10i}{10} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

Rappel ① soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$

A et B et C et D sont alignés ou cocycliques

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$$

② si A , B et C ne sont pas alignés.

$\uparrow$ A , B , C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R} \quad \uparrow$

Interprétation du résultat $\frac{z_D - d}{z - d} \cdot \frac{c - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$

Comme $\frac{z_D - d}{z - d} \cdot \frac{c - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ donc les points A, B, C

et D sont alignés ou cocycliques.

et comme le rapport $\frac{z_D - d}{c - d} = -\frac{1}{2}i \notin \mathbb{R}$

donc les points B, C et D ne sont pas alignés

donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 5

soit l'équation: $(E_a): iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - i a \bar{a} = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{a} \quad \text{on a } \Delta &= b^2 - 4ac = (a + \bar{a} - i)^2 - 4i(-\bar{a} - i a \bar{a}) \\ &= (a + \bar{a})^2 - 2i(a + \bar{a}) + 1 + 4i\bar{a} - 4a\bar{a} \\ &= a^2 + 2a\bar{a} + \bar{a}^2 - 2i(a + \bar{a} - 2\bar{a}) - 4a\bar{a} + 1 \\ &= a^2 - 2a\bar{a} + \bar{a}^2 - 2i(a - \bar{a}) + i^2 \\ &= (a - \bar{a})^2 - 2i(a - \bar{a}) + i^2 \\ &= (a - \bar{a} - i)^2 \end{aligned}$$

Autre méthode: on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

et on développe l'expression $(a - \bar{a} - i)^2$, puis on aura l'égalité..

⑥ on a $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2 = d^2$ avec $d = a - a - i$

donc $z_1 = \frac{-b+d}{2a} = \frac{-a - \bar{a} + i + a - \bar{a} - i}{2i} = -\frac{\bar{a}}{i} = i\bar{a}$

et $z_2 = \frac{-b-d}{2a} = \frac{-a - \bar{a} + i - a + \bar{a} + i}{2i} = 1 + ia$

⑦ a est solution de l'équation (Ea) $\Leftrightarrow a = i\bar{a}$ où $a = 1 + ia$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a) = i(\operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a))$ ou

$\operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a) = 1 + i(\operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a))$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a) = i\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Im}(a)$ ou

$\operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a) = 1 - \operatorname{Im}(a) + i\operatorname{Re}(a)$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$ ou $(\operatorname{Re}(a) = 1 - \operatorname{Im}(a) \text{ et } \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Re}(a))$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$ ou $(\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$

Réciproquement

si $a \in \mathbb{C}$ tel $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ tel $a = x + ix$

on a $i\bar{a} = i(x - ix) = ix + x = a$

et $1 + ia = 1 + i(x + ix) = 1 + ix - x = x + ix$

Partie II :

① on pose $z = \frac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$

donc $\bar{z} = \overline{\left(\frac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a} \right)} = \frac{(1-i\bar{a})-\bar{a}}{-i a - \bar{a}} = \frac{1-i\bar{a}-\bar{a}}{-i a - \bar{a}}$

$= \frac{-i^2 - i\bar{a} + i^2 \bar{a}}{-i a + i^2 \bar{a}} = \frac{+i(-i\bar{a} + i\bar{a})}{+i(-a + i\bar{a})} \quad (i^2 = -1)$

$= \frac{-\bar{a} + i\bar{a} - i}{-a + i\bar{a}} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$

(b) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a} = \frac{(1+ia) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow (i-1)\bar{a} - i = 1+ia - a$$

$$\Leftrightarrow i\bar{a} - ia - \bar{a} + a = 1+i$$

$$\Leftrightarrow -i(a - \bar{a}) + a - \bar{a} = 1+i$$

$$\Leftrightarrow (a - \bar{a})(1-i) = 1+i$$

$$\Leftrightarrow a - \bar{a} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(a) = i$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}$$

(2) on suppose que $\operatorname{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$.

(a) car $R_1(A, -\frac{\pi}{2})(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$$\Leftrightarrow b' - a = -i(i\bar{a} - a)$$

$$\Leftrightarrow b' = \bar{a} + ia + a = \bar{a} + (1+i)a.$$

de plus $R_2(A, \frac{\pi}{2})(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A)$

$$\Leftrightarrow c' - a = i(1+ia - a)$$

$$\Leftrightarrow c' = i - a - ia + a = i(1-a)$$

(b) car E est le milieu du segment [BC].

$$\text{donc } z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{i\bar{a} + 1+ia}{2}$$

$$\text{de plus } \frac{c' - b'}{z_E - z_A} = \frac{i(1-a) - (\bar{a} + (1+i)a)}{\frac{i\bar{a} + 1+ia}{2} - a} = \frac{i - ia - \bar{a} - a - ia}{\frac{i\bar{a} + 1+ia - 2a}{2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{i - 2ia - \bar{a} - a}{1 - 2a + i\bar{a} + ia} = 2i \cdot \frac{1 - 2a + i\bar{a} + ia}{1 - 2a + i\bar{a} + ia} = 2i$$

on a d'après ce qui précède $\frac{z_C' - z_B'}{z_E - z_A} = 2i = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

donc $\left| \frac{z_C' - z_B'}{z_E - z_A} \right| = 2$ et $\arg\left(\frac{z_C' - z_B'}{z_E - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

d'où $|z_C' - z_B'| = 2|z_E - z_A|$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

donc $B'C' = 2AE$ et $(B'C') \perp (AE)$.

Exercice 6

Soit l'équation (E): $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ on a } & (-2i)^3 - (1+2i)(2i)^2 + 3(1+i)(2i) - 10(1+i) \\ &= 8i + 4 + 8i - 6i + 6 - 10 - 10i \\ &= 16i - 16i + 10 - 10 = 0 \end{aligned}$$

donc $-2i$ est une solution de l'équation (E).

② Méthode 1: Division euclidienne.

puisque $(-2i)$ est solution de (E), donc on divise

$$P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) \text{ par } z+2i$$

Méthode 2: Egalité de deux polynômes.

$$\text{on pose } z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2i = -(1+2i) \\ 2i\beta = -10(1+i) \\ \beta + 2i\alpha = 3(1+i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1-4i \\ \beta = \frac{-10(1+i)}{2i} = -5+5i \end{cases}$$

$$\text{pour la vérification}$$

③ Méthode 1: Identité remarquable

$$\begin{aligned} \text{on a } 5-12i &= 9 - 2(2i)(3) - 4 \\ &= 3^2 - 2(3)(2i) + (2i)^2 = (3-2i)^2 \end{aligned}$$

donc les deux racines de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$.

Méthode 2: Les racines n-èmes.

on pose $5-12i = (x+iy)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(5-12i) = \operatorname{Re}((x+iy)^2) \\ |5-12i| = |(x+iy)^2| \\ \operatorname{Im}(5-12i) = \operatorname{Im}((x+iy)^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \\ 2xy = -12 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 & ((1) + (2)) \\ y^2 = 4 & ((2) - (1)) \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \\ xy = -6 \text{ (pour le signe)} \end{cases}$$

et comme $xy < 0$ donc x et y ont deux signes $\neq$
d'où $(x=3 \text{ et } y=-2) / \text{ ou } (x=-3 \text{ et } y=2)$
d'où les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$

(b) on a d'après ce qui précède:

$$(E) \Leftrightarrow (z+2i)(z^2 - (1+4i)z - 5+5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z^2 - (1+4i)z - 5+5i = 0$$

$$\text{soit } \Delta = b^2 - 4ac = (-(1+4i))^2 - 4(-5+5i) \\ = 5-12i = d^2 \text{ avec } d = 3-2i$$

$$\text{donc } z_1 = \frac{-b+d}{2a} = \frac{1+4i+3-2i}{2} = 2+i$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b-d}{2a} = \frac{1+4i-3+2i}{2} = -1+3i$$

donc les trois solutions de (E) sont $-2i$, $2+i$ et $-1+3i$

Partie II

$$① \frac{b-c}{a-c} = \frac{-2i - 2-i}{-1+3i - 2-i} = \frac{-2-3i}{-3+2i} = \frac{2+3i}{3-2i} = \frac{i(3-2i)}{3-2i} = i$$

Méthode 1 : factorisation
Méthode 2 : conjugué

donc $\frac{a-c}{b-c} = i = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

d'où $\left| \frac{a-c}{b-c} \right| = 1$ et $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

d'où $\frac{|a-c|}{|b-c|} = 1$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

d'où $|a-c| = |b-c|$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

$AC = BC$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en C

② a) $M_1 = R_1(M) \Rightarrow z_1 - b = e^{i\pi/3} (z - b)$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(z + 2i) - 2i$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z + 2i) - 2i$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (2i) - 2i$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z + i - \sqrt{3} - 2i$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z - \sqrt{3} - i$$

② b) $M_2 = R_2(M) \Rightarrow (z_2 - a) = e^{-i2\pi/3} (z - a)$

$$\Rightarrow z_2 = \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)(z - a) + a$$

$$\Rightarrow z_2 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)(z + 1 - 3i) - 1 + 3i$$

$$\Rightarrow z_2 = \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)(z + 1 - 3i) - 1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-3i) - 1+3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + (1-3i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - (1-3i)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(c) I milieu du segment $[M_1 M_2]$

$$\Rightarrow \text{aff}(I) = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{aff}(I) = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - (1-3i)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \text{aff}(I) = \frac{-\sqrt{3} - i - (1-3i)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \text{cte} \in \mathbb{C}$$

d'où le point I est un point fixe.

Exercice 7

Partie I: soit l'éq: (E): $z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{① a) } \Delta &= b^2 - 4ac = ((1-i)(m+1))^2 - 4(-i(m^2+1)) \\ &= -2i(m^2+2m+1) + 4i(m^2+1) = 2i(-m^2-2m-1+2m^2+2) \\ &= 2i(m^2-2m+1) = (1+i)^2(m-1)^2 \end{aligned}$$

À retenir $(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

② on a $\Delta = (1+i)^2(m-1)^2 = d^2$ avec $d = (1+i)(m-1)$

on a bien $\Delta \neq 0$ ($m \neq 1$)

$$\begin{aligned} \text{donc } z_1 &= \frac{-b+d}{2a} = \frac{(1-i)(m+1) + (1+i)(m-1)}{2} \\ &= \frac{m+1-im-i+m-1+im-i}{2} = m-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } z_2 &= \frac{-b-d}{2a} = \frac{(1-i)(m+1) - (1+i)(m-1)}{2} \\ &= \frac{m+1-im-i-m+1-im+i}{2} = 1-im \end{aligned}$$

① on pose $z_1 \cdot z_2 = 1 \Leftrightarrow (m-i)(1-im) = 1$
 $\Leftrightarrow m - im^2 - i + im^2 = 1$
 $\Leftrightarrow -im^2 = 1+i$
 $\Leftrightarrow m^2 = -1+i$

posons $m = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$
 donc $m^2 = -1+i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -1+i$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} & (2) \\ 2xy = 1 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

et comme d'après (3) $xy > 0$ donc x et y ont de même signe d'où

$$m_1 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{et } m_2 = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

② on a $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$z_1 = 1 - im = e^{i0} - i e^{i\theta}$$

$$= e^{i0} + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} \quad (\text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

et comme $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ donc $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$
 donc $0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$
 d'où $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$$\text{donc } z_1 = \left[2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + e^{i\pi/2}$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \right)$$

et comme $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ donc $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$
d'où $\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0$

donc $z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$

$$= -2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot e^{i(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

$$= \left(-2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) / \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Partie II:

① M, M_1 et M_2 sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} = \overline{\left(\frac{z_1 - m}{z_2 - m} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{m - i - m} = \overline{\left(\frac{1 - im - m}{m - i - m} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{-i} = \frac{1 + i\bar{m} - \bar{m}}{i}$$

$$\Leftrightarrow 1 - im - m = -1 - i\bar{m} + \bar{m}$$

$$\Leftrightarrow 2 - im + i\bar{m} - m - \bar{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - i(m - \bar{m}) - (m + \bar{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - i(2i \operatorname{Im}(m)) - 2\operatorname{Re}(m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{Im}(m) + \operatorname{Re}(m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + 1 = 0 \text{ avec } m = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Donc l'ensemble des points M est une droite
d'équation $x + y + 1 = 0$

② a) Rappel $M'(z) = R(z(w), \theta)(M(z))$

$$\Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta} (z - w)$$

ona $z' = 1 - iz$

Determinons les points fixes de R

on pose $R(z) = z \Leftrightarrow w = 1 - iw$

$\Leftrightarrow w(1+i) = 1$

$\Leftrightarrow w = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Donc R admet un unique point fixe $\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

on pose $\begin{cases} z' = 1 - iz \\ w = 1 - iw \end{cases} \Rightarrow z' - w = 1 - iz - (1 - iw)$

$\Rightarrow z' - w = -i(z - w)$

$\Rightarrow z' - w = e^{-i\pi/2} (z - w)$

Donc R est une rotation de centre $\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$ et d'angle $\theta = -\pi/2$.

(b) $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} = - \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right)}$

$\Leftrightarrow \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} = - \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i}$

$\Leftrightarrow m - i - 1 + im = \bar{m} + i - 1 - i\bar{m}$

$\Leftrightarrow m - \bar{m} + i(m + \bar{m}) - 2i = 0$

$\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(m) + 2i \operatorname{Re}(m) - 2i = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(m) + \operatorname{Re}(m) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1 \quad \text{CQFD}$

(c) Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \times \frac{w - m}{w - z_1} \in i\mathbb{R}$

et comme $z_1 = 1 - im \Rightarrow R(M) = M_1$

$\Rightarrow z_1 - w = -i(m - w)$

$\Rightarrow \frac{z_1 - w}{m - w} = -i$

$\Rightarrow \frac{w - m}{w - z_1} = \frac{1}{i} = -i$

donc $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \times \frac{w - m}{w - z_1} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} (-i) \in i\mathbb{R} \quad (\text{car } z_1 = 1 - im)$

$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) \neq 1 = 0$

$\Leftrightarrow x + y \neq 1 = 0$ avec $m = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$

donc l'ensemble des points m tels que les points z, m, m_1 et m_2 soient cocycliques est la droite

(Δ) d'équation $x + y \neq 1 = 0$

Exercice 8

soit l'équation (E): $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

① a) on a $(1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 - 4i(1 + i(2 - \sqrt{3})) - 2 + 2i\sqrt{3}$
 $= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 - 4i + 4(2 - \sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3}$
 $= (2 - \sqrt{3})(2i - (2 - \sqrt{3}) + 4) + 1 - 4i - 2 + 2i\sqrt{3}$
 $= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} + 2i) - 1 - 2i(2 - \sqrt{3})$
 $= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} + 2i - 2i) - 1$
 $= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) - 1 = (2)^2 - (\sqrt{3})^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

donc $a = (1 + i(2 - \sqrt{3}))$ est solution de l'équation (E).

② Important

z_1 et z_2 solutions de l'équation (E): $az^2 + bz + c = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

on a bien $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4i}{1} = 4i$ et $z_1 = 1 + i(2 - \sqrt{3})$

donc $z_2 = 4i - z_1 = 4i - 1 - i(2 - \sqrt{3}) = -1 + i(2 + \sqrt{3})$

② a) on pose $b = 1 + i(2 + \sqrt{3})$ et $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + i(2 - \sqrt{3}))^2 = 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 \quad (i^2 = -1) \\ &= 1 - (4 - 4\sqrt{3} + 3) + 2i(2 - \sqrt{3}) \\ &= -6 + 4\sqrt{3} + 2i(2 - \sqrt{3}) \\ &= -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3} \\ &= -2(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 2i(2 - \sqrt{3}) \\ &= +2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + 2i(2 - \sqrt{3}) \\ &= (2 - \sqrt{3})(2\sqrt{3} + 2i) \\ &= (2 - \sqrt{3})\left(4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right) \\ &= 4(2 - \sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\pi/6} \end{aligned}$$

Autre méthode

on développe les deux expressions a^2 et $4(2 - \sqrt{3})e^{i\pi/6}$.

⑥ on pose $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$

donc $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\pi/6}$

soit $r^2 e^{i2\theta} = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\pi/6}$

soit $\begin{cases} r^2 = 4(2 - \sqrt{3}) \\ 2\theta \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \end{cases}$ soit $\begin{cases} r = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{\pi} \end{cases}$

soit $a = \left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right)$ ou $a = \left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{13\pi}{12}\right)$

et comme $\left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

et $\left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{13\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ car $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$

et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0$ car $\frac{\pi}{12} < \frac{13\pi}{12} < \frac{3\pi}{2}$

donc $a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right)$ (car $\operatorname{Re}(a) > 0$)

③ Ω est centre du cercle (T) dont (AB) est l'un des diamètres
donc Ω est milieu de (AB)

donc $w = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-4i}{2} = 2i$

⑥ Calculons d'abord R le rayon de (T)

comme (AB) est l'un des diamètres de (T)

donc $R = \frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|-1+i(2-\sqrt{3}) - 1-i(2-\sqrt{3})|}{2}$

$= |-1+i\sqrt{3}| = 2$

et on a $\Omega O = |w-0| = |w| = |2i| = 2 = R$

de plus $\Omega C = |c-w| = |2i + 2e^{i\pi/4} - 2i| = |2e^{i\pi/4}| = 2 = R$

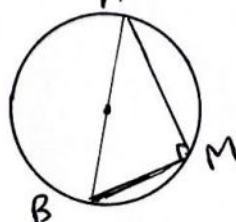
donc $\Omega O = \Omega C = R$

Donc O et C appartiennent au cercle (T) .

⑦ Important

le point M appartient au cercle (T) donc l'un des diamètres est (AB)

$\iff$ le triangle ABM est rectangle en M



soit le point C appartenant au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est (AB)

donc le triangle ABC est rectangle en C .

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{a-a}{b-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{a-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{c-b} \text{ est imaginaire pur.}$$

Exercice 9

Soit l'équation $(E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

① a) Méthode 1: Calcul de Δ .

$$\text{on } \Delta = b^2 - 4ac = (-2(a-1))^2 - 4(2)(a-1)^2$$

$$= 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2 = -4(a-1)^2$$

$$= (2i(a-1))^2 = d^2 \quad | \quad d = 2i(a-1)$$

comme $a \neq 1$ donc $\Delta \neq 0$ donc l'équation (E) admet

$$\text{deux solutions } z_1 = -\frac{b+d}{2a} = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{2(2)}$$

$$= \frac{a-1}{2} (1+i)$$

$$\text{et } z_2 = -\frac{b-d}{2a} = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{2(2)}$$

$$= \frac{a-1}{2} (1-i)$$

Méthode 1 : Propriété (somme et produit de deux racines)

$$\text{on a } z_1 + z_2 = \frac{a-1}{2} (1+i) + \frac{a-1}{2} (1-i) = \frac{a-1}{2} (1+i+1-i) \\ = a-1 = - \frac{-2(a-1)}{2}$$

$$\text{et } z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{a-1}{2} (1+i) \right) \left(\frac{a-1}{2} (1-i) \right) \\ = \left(\frac{a-1}{2} \right)^2 (1^2 - i^2) = \frac{(a-1)^2}{4} (2) = \frac{(a-1)^2}{2}$$

donc z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation (E)

Rappel soit l'éq. (E) : $az^2 + bz + c = 0$ $a \neq 0$

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont des solutions de (E)} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Méthode 2 : Remplacement.

$$\textcircled{2} \textcircled{a} \text{ on a } a = e^{i\theta} \text{ avec } 0 < \theta < \pi$$

$$\text{donc } a-1 = e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta} + e^{i\pi} \\ = e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})} \left(e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})} \right) \\ = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})} \\ = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})} \\ = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$$

Méthode 2 on utilise $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$
 $\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

Rappel $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
 $= 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$$\begin{aligned}
 a-1 &= \cos \theta + i \sin \theta - 1 = \cos\left(2 \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(2 \frac{\theta}{2}\right) - 1 \\
 &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\
 &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right) \\
 &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

⑥ Tout d'abord

$$\begin{aligned}
 1+i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } 1-i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
 &= \sqrt{2} \cdot e^{-i \frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } z_1 &= \frac{a-1}{2} (1+i) = \frac{1}{2} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)} \quad \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0\right) \\
 &= \left[\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\right] \quad \left(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{de plus } z_2 &= \frac{a-1}{2} (1-i) \\
 &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \left[\sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right].
 \end{aligned}$$

Partie II

① Comme J est milieu du segment (AC)

$$\text{donc } z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{a+i}{2}$$

de plus k est milieu du segment (AB)

$$\text{donc } z_k = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{a-i}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ on a } r_1(j, \frac{\pi}{2}) (c) = c'$$

$$\text{donc } z_{c'} - z_j = e^{i\pi/2} (z_c - z_j)$$

$$\Rightarrow c' - \frac{a+i}{2} = i \left(c - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow c' = -1 - \frac{i(a-1)}{2} + \frac{a+i}{2} = \frac{-2 - i(a-1) + a + i}{2}$$

$$c' = \frac{-1 - i(a-1) + a + i}{2} = \frac{a(1-i) - (1-i)}{2}$$

$$= \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

de plus $A' = r_2(k, \frac{\pi}{2}) (A)$

$$\Rightarrow a' - \frac{a-i}{2} = e^{i\pi/2} \left(a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a' = i \left(\frac{2a-a+i}{2} \right) + \frac{a-i}{2}$$

$$= \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{a(1+i) - (1+i)}{2}$$

$$= \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

$$\textcircled{2} \frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(1+i)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)(1+i-1+i)}{2} \cdot \frac{1}{a-1} = i$$

Deduction

on a d'après ce qui précède $\frac{a'-c'}{a-1} = i = (1, \frac{\pi}{2})$

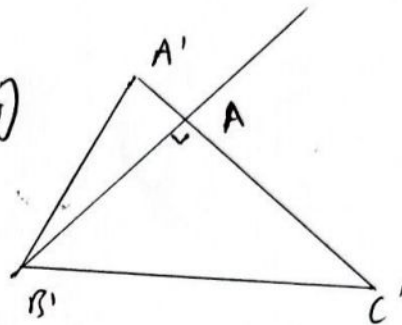
donc $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

d'où $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

d'où $(AB') \perp (A'C')$

et comme $B' \in (AB')$

donc (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$



تم بحمد الله وسنة

يوم السبت

04/06/2022

عالم

11:55

الحمد لله وكفى