

Exercice 01

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$
- b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$
- c) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- 2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)$
- b) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1}$, exprimer v_n en fonction de n
- c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$
- 3) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n)$
- b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Exercice 02

- 1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = 2n^2 + n$
 Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison r tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$
 Déterminer r la raison de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 03

- Soit $n \in \mathbb{N}$; on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et $0! = 1$
- 1) On pose $U_k = k!$ Avec $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $U_{k+1} - U_k = k(k!)$
 - 2) On pose $S_n = 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!)$
 Calculer S_n en fonction de n en utilisant le symbole $\sum$

Exercice 04

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Calculer en fonction de n :

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} ; \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(k+1)!} ; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \\
 & \text{d) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} ; \quad \text{e) } \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) ; \quad \text{f) } \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)
 \end{aligned}$$

- 2) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+4)(n+1)^2$
- b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

- 3) a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$
- a) Retrouver la question 2) b) sans récurrence

Exercice 05

Soient f et g deux applications tels que :

$$\begin{aligned}
 & f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[\\
 & x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1} ; \quad x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

- 1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$
- b) En déduire que f n'est pas surjective
- 2) Déterminer $f^{-1}([-\infty; 2])$ puis, montrer que $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$
- 3) Montrer que f est injective
- 4) Montrer que g est bijective puis déterminer sa bijection g^{-1}

Exercice 06

- 1) Soit a ; b et c des mesures des angles d'un triangle
 Montrer que : $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \times \tan b \times \tan c$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 $(E): \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} ; (F): \cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$

Exercice 01

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$

c) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)$

b) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1}$, exprimer v_n en fonction de n

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$

3) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n)$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n (\sqrt{3}-1)$

Correction de l'exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1)a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

➤ Pour $n=0$ on a $1 < u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{3}$ qui est vrai

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 < u_n \leq \sqrt{3}$ et montrons que $1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

$$1 < u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) < \frac{1}{u_n} \leq -1 + (1 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) :$

$$u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$$

$$A = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3}) = u_n^2 - \sqrt{3}u_n - u_n + \sqrt{3}$$

$$= u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}$$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) :$

$$u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$$

$$A = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3}) = u_n^2 - \sqrt{3}u_n - u_n + \sqrt{3}$$

$$= u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}$$

c) Montrer que la suite est croissante

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n} - u_n = \frac{(1 + \sqrt{3})u_n - \sqrt{3} - u_n^2}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}}{u_n} = \frac{-[u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}]}{u_n} \\ &= \frac{(1 - u_n)(u_n - \sqrt{3})}{u_n} \end{aligned}$$

$$1 < u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow (1 - u_n) < 0 \text{ et } (u_n - \sqrt{3}) \leq 0 \text{ et } u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

On a la suite (u_n) est croissante

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq u_0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)$

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} &= \frac{(1+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{u_n}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{u_n}-1} \\
 &= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{u_n}}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{u_n}} = \frac{\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n}}{\frac{\sqrt{3}u_n-\sqrt{3}}{u_n}} \\
 &= \frac{u_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}u_n-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)
 \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1}$, exprimer v_n en

fonction de n

Soit n un entier naturel

On a : $\frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_n$

Donc la suite est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0-1} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = -1$$

Donc $v_n = v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1} \Rightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow v_n u_n - v_n = u_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - \sqrt{3}}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3} - v_n}{1 - v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n}$$

2)a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n)$$

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{u_n}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{u_n} - 1 = \frac{\sqrt{3} - u_n}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_n} (\sqrt{3} - u_n)$$

En a $u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ c-à-dire $\frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}$

Et en a $\sqrt{3} - u_n \geq 0$

Donc $\frac{1}{u_n} (\sqrt{3} - u_n) \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n)$

Donc $\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n)$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

➤ Pour $n=0$ on a :

$$\sqrt{3} - u_0 = \sqrt{3} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{Et } \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{Donc } \sqrt{3} - u_0 \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

$$\text{Supposons que } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Et montrons que } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

$$\text{On a } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) (\sqrt{3} - u_n) \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Et on a d'après la question précédente

$$\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} (\sqrt{3} - u_n),$$

$$\text{Donc } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) (\sqrt{3} - u_n) \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Donc: } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

D'après le principe de récurrence, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Exercice 02

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = 2n^2 + n$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$

et de raison r tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$

Déterminer r la raison de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Correction de l'exercice 02

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = 2n^2 + n$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n \quad ; \quad (L1)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = 2(n-1)^2 + n - 1 ; (L2)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = 2n^2 + n - 2(n-1)^2 - (n-1) \quad ; \quad (L1 - L2)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = 2n^2 + n - 2n^2 + 4n - 2 - n + 1$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = 4n - 1$$

2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$

et de raison r tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$

Déterminer r la raison de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique décroissante donc $r \leq 0$

$$\text{Et on a } (\forall n ; p \in \mathbb{N}) : v_n = v_0 + (n - 0)r$$

$$\text{Donc } (\forall n ; p \in \mathbb{N}) : v_n = 2 + nr$$

$$4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164 \Rightarrow 4(2 + r)^2 + (2 + 2r)^2 = 164$$

$$\Rightarrow 4(2 + r)^2 + 4(1 + r)^2 = 164$$

$$\Rightarrow (2 + r)^2 + (1 + r)^2 = 41$$

$$\Rightarrow r^2 + 3r - 18 = 0 \Rightarrow r = -6 \text{ ou } r = 3$$

$$\text{Donc } r = -6 \text{ car } r \leq 0$$

Exercice 03

Soit $n \in \mathbb{N}$; on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et $0! = 1$

1) On pose $U_k = k!$ Avec $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

2) On pose $S_n = 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!)$

a) Ecrire S_n en utilisant le symbole $\sum$ et U_k

b) Calculer S_n en fonction de n en utilisant le symbole $\sum$

Rappel :

Symboles : $\sum$ et $\prod$

$n \in \mathbb{N}$ et $a_0; a_1; a_2 \dots a_n$ et c des réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} 1 = (n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} c = c \sum_{k=0}^{k=n} 1 = c(n+1)$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} c = c \times c \times \dots \times c = c^n$$

Changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

Exemples classiques à retenir :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} ; q \neq 1$$

Correction de l'exercice 03

Soit $n \in \mathbb{N}$; on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et $0! = 1$

1) On pose $U_k = k!$ Avec $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

$$\begin{aligned} U_{k+1} - U_k &= (k+1)! - k! \\ &= (k+1) \times k! - k! \\ &= k! (k+1 - 1) \\ &= k(k!) \end{aligned}$$

2) On pose $S_n = 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!)$

Calculer S_n en fonction de n en utilisant le symbole $\sum$

$$S_n = 1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} k(k!) = \sum_{k=1}^{k=n} U_{k+1} - U_k$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} U_{k+1} - \sum_{k=1}^{k=n} U_k$$

$$= \sum_{j=2}^{j=n+1} U_j - \sum_{k=1}^{k=n} U_k ; \text{ on a posé } j = k+1$$

$$= \left(\sum_{j=2}^n U_j + U_{n+1} \right) - \left(U_1 + \sum_{k=2}^{k=n} U_k \right)$$

$$= U_{n+1} - U_1$$

$$= (n+1)! - 1$$

Exercice 04

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Calculer en fonction de n :

a) $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$; b) $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{(k+1)!}$; c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$
 d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$; e) $\prod_{k=1}^{k=n} (1 + \frac{1}{k})$; f) $\prod_{k=2}^{k=n} (1 - \frac{1}{k^2})$

2) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+4)(n+1)^2$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

3) a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$

b) Retrouver la question 2) b) sans récurrence

Correction de l'exercice 04

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Calculer en fonction de n :

a) $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Déterminons a et b tels que : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}$$

Donc $a + b = 0$ et $a = 1$

Donc $b = -1$ et $a = 1$

D'où : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

1ère méthode :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} ; \text{ on a posé } j = k+1 \\ &= \left(1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

b) $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k}$$

On a pose $j = n + 1 - k$

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow -n \leq -k \leq -1$$

$$\Rightarrow 1 \leq n + 1 - k \leq n$$

$$\Rightarrow 1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 0$$

$$d) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

Déterminons a et b tels que : $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2) + bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+2)}$$

Donc $a + b = 0$ et $2a = 1$

Donc $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$

$$D'où : \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$e) \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{k}$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$$

$$f) \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

1ère méthode :

$$\text{On a : } 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \times \dots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

2ème méthode :

$$\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} (k-1) \times \prod_{k=2}^{k=n} (k+1)}{\prod_{k=2}^{k=n} k \times \prod_{k=2}^{k=n} k}$$

$$= \frac{1 \times \prod_{k=3}^{k=n} (k-1) \times \prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=3}^{k=n+1} (k-1) \times \prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=3}^{k=n} (k-1) \times \prod_{k=3}^{k=n} k \times (n+1)}{n \times \prod_{k=3}^{k=n} (k-1) \times 2 \times \prod_{k=3}^{k=n} k}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

2)a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n + 4)(n + 1)^2$

$$\begin{aligned}
 A &= (n + 4)(n + 1)^2 = (n + 4)(n^2 + 2n + 1) \\
 &= n^3 + 2n^2 + n + 4n^2 + 8n + 4 = n^3 + 6n^2 + 9n + 4
 \end{aligned}$$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

➤ Pour $n=1$ on a : $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ qui est vraie

Supposons que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Et montrons que $\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

3)a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} \\
 &= \frac{1}{2k} - \frac{2}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} = \frac{(k+1)(k+2) - 2k(k+2) + k(k+1)}{2k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{2}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}
 \end{aligned}$$

b) Retrouver la question 2) b) sans récurrence

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \left(\frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n^2 + 2n + n + 2 - 2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$



Exercice 05

Soient f et g deux applications tel que :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; g: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1} ; x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

b) En déduire que f n'est pas surjective

2) Déterminer $f^{-1}(]-\infty; 2])$

3) Montrer que $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$

4) Montrer que f est injective

5) Montrer que g est bijective puis

déterminer son application réciproque g^{-1}

Correction de l'exercice 05

Soient f et g deux applications tel que :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; g: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1} ; x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

Cas 1 : $x \in]-\infty; 0]$; c - t - dire $x \leq 0$

On a $x \leq 0$ donc $-x \geq 0$

Et on a : $\sqrt{x^2 + 1} > 0$

Donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Cas 2 : $x \in]0; +\infty[$; c - t - dire $x > 0$

1ère méthode :

On a : $x^2 + 1 > x^2$ donc : $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$

donc : $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

Et on a : $x > 0$ donc $|x| = x$

donc : $\sqrt{x^2 + 1} > x$

Donc : $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

2ème méthode :

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} > 0 ; \text{ car } x > 0$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

b) En déduire que f n'est pas surjective

Remarque : f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Donc $f(\mathbb{R}) \subset]0; +\infty[$

Donc $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$

Donc f n'est pas surjective

2) Déterminer $f^{-1}(]-\infty; 2])$

$x \in f^{-1}(]-\infty; 2]) \Leftrightarrow f(x) \leq 2$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \leq 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \leq x^2 - 4x + 4 \text{ et } 2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \text{ et } x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

D'où $f^{-1}(]-\infty; 2]) =]-\infty; \frac{4}{3}]$

3) Montrer que $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Donc $f(\mathbb{R}) \subset]0; +\infty[$

Montrons que $]0; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$

Soit $y \in]0; +\infty[$

Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + y^2 - 2xy \text{ et } y \geq x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \text{ et } y \geq x$$

$$\text{Et on a } y \geq \frac{y^2 - 1}{2y} \Leftrightarrow 2y^2 \geq y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0 \text{ qui est vraie}$$

Donc $y \geq x$

Donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$

Donc $y \in f(\mathbb{R})$

Donc $]0; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$; D'où $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$

4) Montrer que f est injective

Soient x et y deux réels tels sur $f(x) = f(y)$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ -1 \\ \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{y - \sqrt{y^2 + 1}} \text{ conjuguée} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x - \sqrt{x^2 + 1} = y - \sqrt{y^2 + 1} \\ \Rightarrow 2x = 2y ; l_1 + l_2 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Donc f est injective

5) Montrer que g est bijective puis

déterminer son application réciproque g^{-1}

On a $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$

Donc g est surjective

ET d'après la question 4) g est injective

D'où g est bijective et d'après la question 3)

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; +\infty[) : g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Exercice 06

1) Soit a ; b et c des mesures des angles d'un triangle

Montrer que : $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \times \tan b \times \tan c$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E): $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$; (F) : $\cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$

Correction de l'exercice 06

1) Soit a ; b et c des mesures des angles d'un triangle

Montrer que : $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \times \tan b \times \tan c$

On a a ; b et c des mesures des angles d'un triangle

Donc $a + b + c = \pi$

Donc $a + b = \pi - c$

Donc $\tan(a + b) = \tan(\pi - c)$

Donc $\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = -\tan(c)$

Donc $\tan(a) + \tan(b) = -\tan(c)(1 - \tan(a)\tan(b))$

Donc $\tan(a) + \tan(b) = \tan(a) \times \tan(b) \times \tan(c) - \tan(c)$

Donc $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \times \tan b \times \tan c$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E): $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$; (F) : $\cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$

(E): $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$

On a ; $\sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ donc :

$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

On considère l'équation suivante (F): $\cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$

On a $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

Donc $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$

Donc :

$$\cos^4(3x) + \sin^4(3x) = (\cos^2(3x) + \sin^2(3x))^2 - 2\cos^2(3x)\sin^2(3x)$$

$$= 1 - 2\cos^2(3x)\sin^2(3x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2\cos(3x)\sin(3x))^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin(6x))^2$$

$$(F) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(\sin(6x))^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(6x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{k\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$



I. Rappels :

1) Formule de base

Soient $\theta \in \mathbb{R}$

➤ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

➤ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

➤ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

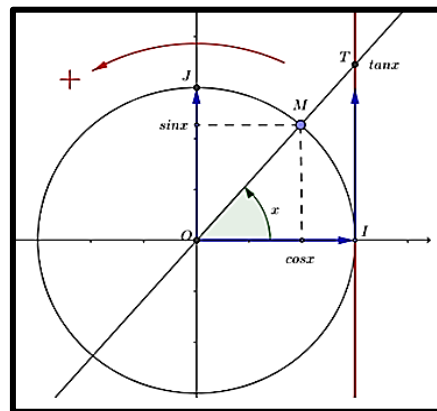
➤ $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

➤ $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

➤ $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) ; k \in \mathbb{Z}$

➤ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta) ; k \in \mathbb{Z}$

➤ $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta) ; k \in \mathbb{Z}$



A partir de cercle trigonométrique en dessous :

➤ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

➤ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

➤ $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

➤ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

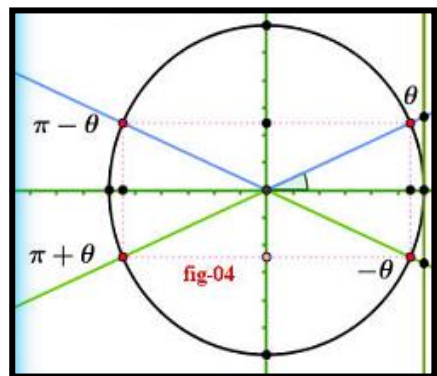
➤ $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$

➤ $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$

➤ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$

➤ $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

➤ $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$



A partir de cercle trigonométrique en dessous

➤ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

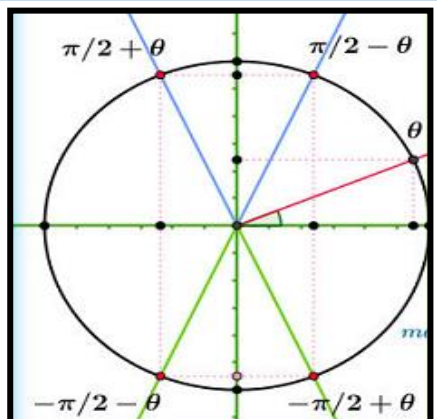
➤ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

➤ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$

➤ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

➤ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$

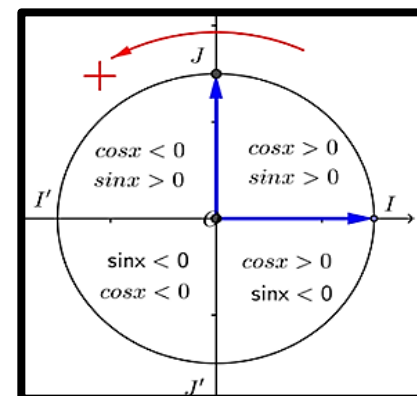
➤ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-1}{\tan \theta}$



2) Tableau des valeurs importantes

x	0	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$
Sin(x)	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	1
Cos(x)	1	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0
Tan(x)	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	FI

3) Signe de cos et sin



4) Equation-inéquation trigonométrique

➤ Equation de la forme $\cos(x) = a$ avec $a \in [-1; 1]$

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\alpha)$ d'où :

$\cos(x) = a$ équivaut à: $\cos(x) = \cos(\alpha)$

équivaut à: $x = \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$$

➤ Equation de la forme $\sin(x) = a$ et $a \in [-1; 1]$

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin(\alpha)$ d'où :

$\sin(x) = a$ équivaut à: $\sin(x) = \sin(\alpha)$

équivaut à: $x = \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$$

➤ Equation de la forme $\tan(x) = a$ et $a \in \mathbb{R}$

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan(\alpha)$ d'où :

$\tan(x) = a$ équivaut à: $\tan(x) = \tan(\alpha)$

équivaut à: $x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

II) Formules de transformation :

Formules principales :

$$1) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$2) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$3) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$4) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$5) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$6) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

Formules de duplication

$$7) \sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

$$8) \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$9) \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

Formules de linéarisation

$$10) \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

On pose $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ on trouve que :

$$11) \tan(a) = \frac{2t}{1 - t^2} ; \sin(a) = \frac{2t}{1 + t^2} ; \cos(a) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Transformations des produits à des sommes

$$12) \cos a \cos b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$13) \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$14) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Transformations des sommes à des produits

$$15) \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$16) \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$17) \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$18) \sin(p) - \sin(q) = -2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Transformation de $a \cos x + b \sin x$

$$\begin{aligned} 19) a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20) a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta) \end{aligned}$$

**Raisonnement par récurrence**

Soit $P(n)$ une proposition tel que $n \geq n_0$,
Si

- la propriété $P(n)$ est vraie pour n_0
- Pour n un entier fixé tel que $n \geq n_0$

La proposition : $P(n) \implies p(n+1)$

est vraie

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Exemple :

Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel ; $2^n \geq n$

- Pour $n=0$ on a : $2^0 = 1 \geq 0$.

Donc la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- Soit n un entier naturel

Supposons que $2^n \geq n$. (H.R)

et démontrons que $2^{n+1} \geq n+1$,

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n$$

$$= 2 \times 2^n$$

$$= 2^n + 2^n$$

Et on a $2^n \geq n$ d'après (H.R)

ET $2 \geq 1$ donc $2^n \geq 1$

D'où $2^n + 2^n \geq n+1$

- Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a

Pour tous entier naturel ; $2^n \geq n$.

Suite majorée ; minorée ; bornée

➤ $U_n > a \Rightarrow (U_n)$ est minorée par a

➤ $U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est majorée par b

➤ (U_n) est bornée ssi (U_n) est majorée et minorée

➤ $a < U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est bornée

Suite croissante ; décroissante

➤ $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante

➤ $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

➤ $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante

Propriété

(U_n) est une suite croissante alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_n \geq U_0$$

(U_n) est une suite décroissante alors

$$\forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq U_0$$

Suite géométrique - arithmétique

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme U_0 et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$

(U_n) est une suite géométrique

Définition :

$$U_{n+1} = q U_n$$

U_n en fonction de n

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Cas particulier :

$$U_n = U_0 \times q^n$$

Somme des termes

$$S_n = U_p + \dots + U_n$$

$$= U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Cas particulier :

$$S_n = U_0 + \dots + U_n$$

$$= U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

a ; b et c trois termes consécutifs

$$a \times c = b^2$$

(U_n) est une suite arithmétique

Définition :

$$U_{n+1} - U_n = r$$

U_n en fonction de n

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

Cas particulier :

$$U_n = U_0 + nr$$

Somme des termes

$$S_n = U_p + \dots + U_n$$

$$= \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$$

Cas particulier :

$$S_n = U_0 + \dots + U_n$$

$$= \frac{(n + 1)(U_0 + U_n)}{2}$$

a ; b et c trois termes consécutifs

$$a + c = 2b$$