

**Niveau : Deuxième bac
sciences maths**

Série corrigée 2

Révision pour 2bac sc maths

Collection FMATHS



Prof fayssal

0681399067

www.elboutkhili.jimdofree.com

Exercice 01

Calculer les limites suivantes :

- 1)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$; **2)** $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$; **3)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; **5)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$; **6)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}$; **8)** $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - |2x - \sqrt{x}|}$; **9)** $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x}$; **11)** $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$; **12)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan^{2024}(x)} - \frac{1}{\sin^{2024}(x)}$; **14)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x$
15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}}$; **16)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ avec $a ; b > 0$
17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$; **18)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) + \sin x$; **19)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

Exercice 02

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}$

- 1)** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2) Ecrire la fonction f son valeur absolue
3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Exercice 03

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 + \sin(x)}{2 + \sqrt{x}} ; & x > 0 \\ f(x) = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} ; & x < 0 \end{cases}$$

- 1)** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : |f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 04

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} ; & x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} ; & x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

- 1)** Déterminer D_f l'ensemble de définition
2) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

Exercice 05

- 1)** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0 \quad ; \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \text{ un réel}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} ; a > 0$$

- 2)** Etudier suivant les valeurs des entiers n et m la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

- 3)** Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right] - \{2\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}, a ; b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer a et b pour que f admette une limite finie en 2

- 4)** g une fct tels que : $g(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$, $a ; b \in \mathbb{R}$
 Déterminer a et b pour que g admette une limite finie en $+\infty$

Exercice 06

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer: **i)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$; **ii)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$
iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)}$; **iiii)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \times \dots \times (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$

Exercice 01

Calculer les limites suivantes :

- 1)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$; **2)** $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; **3)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; **5)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$; **6)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}$; **8)** $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - |2x - \sqrt{x}|}$; **9)** $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x}$; **11)** $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$; **12)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan^{2024}(x)} - \frac{1}{\sin^{2024}(x)}$; **14)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x$
15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}}$
16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) + \sin x$; **17)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

Solution de l'exercice 01

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 + x^2 - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation par $x - 1$

1^{ère} méthode : Factorisation par a division euclidienne

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 - 3 \\
 - 2x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 0 + 3x^2 - 3 \\
 - 3x^2 + 3x \\
 \hline
 0 + 3x - 3 \\
 - 3x + 3 \\
 \hline
 0 + 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x - 1 \\
 \hline
 2x^2 + 3x + 3
 \end{array}$$

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 3)$

2^{ème} méthode : Factorisation par algorithme de HORNER :

x^3	x^2	x	1	
2	1	0	-3	1
	2	3	3	

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 3)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 3x + 3)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 3x + 3$$

$$= 8$$

3^{ème} méthode : Par utilisation de nombre dérivée

Considérons la fonctions f définit par

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$$

On a la fonction f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x) = 6x^2 + 2x$$

Donc $f'(1) = 6 \times 1^2 + 2 \times 1 = 8$

Et on a : $f(1) = 2 + 1 - 3 = 0$

Maintenant calculons notre limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 8$$

2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 5} x - 5 = 5 - 5 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

1^{ère} méthode : Levons l'indétermination à l'aide de conjuguée :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 1 - 4}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : Par utilisation de nombre dérivée

Considérons la fonctions f définit par $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$

On a la fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a :

Rappel : $\sqrt{U}' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$ donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Donc : $f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}$; et on a $f(5) = \sqrt{5-1} - 2 = 0$

Maintenant calculons notre limite :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(5) = \frac{1}{4}$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $+\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation :

1^{ère} méthode

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2ème méthode :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 2 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 2) = +\infty
 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 2 = +\infty$

3ème méthode

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1^2 - 1^2 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1)^2 - 1 \\
 &= +\infty \quad ; \quad \text{car et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty
 \end{aligned}$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - 3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 6x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

1ère méthode : La fonction est une fonction rationnelle don on peut utiliser un théorème de cours comme suit :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3 \times x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2ème méthode : Par factorisation par le plus haut degré

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(2 + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3})}{x^4(1 - \frac{6x}{x^4} + \frac{5}{x^4})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3})}{x(1 - \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4})} = 0
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^4} = 0$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

1ère méthode :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$,

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$

2ème méthode

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \square + \infty
 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0;$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})}{-2} = -\infty$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - |2x - \sqrt{x}|} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}|2\sqrt{x} - 1|}$

$|2\sqrt{x} - 1| = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{4} \\ 1 - 2\sqrt{x} & \text{si } x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - |2x - \sqrt{x}|} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - (\sqrt{x} - 2x)}$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{3x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(3\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$

9) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

On a ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x - 3 = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0$

Donc il faut savoir le signe de $x^2 - 3x + 2$ à gauche de 1

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$

Donc les solutions sont : $x = \frac{3+\sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ ou $x = \frac{3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$

Le tableau de signe de $x^2 - 3x + 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	+

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0^+$ et on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x - 3 = -3$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x}$ Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \times \frac{(3x)^2}{x \times \frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \times \frac{9}{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$

Car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(X)}{(X)^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$

$$11) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\sin x}{\cos x}$$

On a ; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos x = 0$

Le tableau de signe de $\cos x$

X	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\pi$
$\cos x$	$-$	0	0	$-$

Donc $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos x = 0 = 0^+$ et on a : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin x = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)} \tan x = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

On pose $X = \frac{\pi}{2} - x$ donc $x = \frac{\pi}{2} - X$

Et on a : $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - X\right)}{(X)^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(X)}{(X)^2} = \frac{1}{2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan^{2024}(x)} - \frac{1}{\sin^{2024}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x)} - \frac{1}{\sin^{2024}(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{2024}(x) - 1}{\sin^{2024}(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)(\cos^{2023}(x) + \cos^{2022}(x) + \dots + 1)}{\sin^{2024}(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\cos(x)-1)}{x^2} \times x^2 (\cos^{2023}(x) + \cos^{2022}(x) + \dots + 1)}{\frac{\sin^{2024}(x)}{x^{2024}} \times x^{2024}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\cos(x)-1)}{x^2}}{\frac{\sin^{2024}(x)}{x^{2024}}} \times \frac{(\cos^{2023}(x) + \cos^{2022}(x) + \dots + 1)}{x^{2022}} = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\cos(x)-1)}{x^2}}{\frac{\sin^{2024}(x)}{x^{2024}}} = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^{2023}(x) + \cos^{2022}(x) + \dots + 1)}{x^{2022}} = +\infty$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - 2x)(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2})} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3 + \frac{1}{x})}{(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{-3}{2}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\begin{aligned}
 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)} \\
 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} = 0
 \end{aligned}$$

Rappels 1 :

➤ Si $(\forall x \in I): f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

➤ Si $(\forall x \in I): f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

(Théorème d'encadrement) :

Si $(\forall x \in I): g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Rappels 2 :

Fonction partie entière

$(\forall x \in \mathbb{R}): E(x) \leq x < E(x) + 1$

Propriétés : Soit $p \in \mathbb{Z}$

➤ $(\forall x \in I = [p; p + 1[); E(x) = p$

➤ $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}); E(x + p) = E(x) + p$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}): x - 1 < E(x) \leq x$

16) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ avec $a; b > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$

Si $x > 0$ on a $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{b}{a}$

Si $x < 0$ on a $\frac{b}{a} \leq \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{b}{a}$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned}
 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x + 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} + 1-x - 4}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x^2} - 2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{1-x^2}^2 - 2^2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(2\sqrt{1-x^2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1-x^2) - 4}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(2\sqrt{1-x^2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(2\sqrt{1-x^2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(2\sqrt{1-x^2} + 2)} \\
 &= \frac{-4}{(1+1+2)(2+2)} \\
 &= -\frac{4}{16} \\
 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) + \sin x$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $x-1 < E(x) \leq x$

Donc $x-2 < E(x) + \sin x$

• Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) + \sin x = +\infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$$

12) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$

Et donc :

$$\begin{aligned}
 -\frac{x}{x^2+1} &\leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \\
 -\frac{x}{x^2} &\leq -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } -\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$$

• Or $\sin x \leq 1$ $\sin x \leq 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0.$$

Exercice 02

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
- 2) Ecrire la fonction f sous sa valeur absolue
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Solution de l'exercice 02

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

$$x \in D_f \Leftrightarrow |x-1| \neq 0 \text{ et } |x^2-1| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ et } x^2-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

- 2) Ecrire la fonction f sous sa valeur absolue

En utilisant la définition de la valeur absolue on trouve

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 0 \\ -X & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$ x-1 $	$1-x$	$1-x$	0	$x-1$
$ x^2-1 $	x^2-1	0	$1-x^2$	x^2-1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{-(x-1)} - \frac{3x-1}{x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x}{1-x} - \frac{3x-1}{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{x-1} - \frac{3x-1}{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-x(x+1)-3x+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x(1+x)-3x+1}{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x(x+1)-3x+1}{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-(x^2+4x-1)}{x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{(x-1)^2}{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{1-x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1-x}{1+x} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{1+x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+4x-1}{1-x^2} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

Exercic 03

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2+\sin(x)}{2+\sqrt{x}} ; & x > 0 \\ f(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} ; & x < 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : |f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution

$$1) * \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin(x)}{2 + \sqrt{x}} = \frac{2 + 0}{2 + 0} = 1$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = (1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Car : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$$\begin{aligned} 2) * |f(x)| &= \left| \frac{2 + \sin(x)}{2 + \sqrt{x}} \right| \\ &\leq \frac{|2| + |\sin(x)|}{2 + \sqrt{x}} \\ &\leq \frac{3}{2 + \sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$* \text{ On a : } -\frac{3}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \text{ et on a ; } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc d'après théorème d'encadrement on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercic 04

f une fonction Définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} ; & x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} ; & x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition

2) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

Solution :

1) Considérons les fonctions $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ et $v: x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

$$x \in D_u \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ ou } x \neq -1$$

$$\text{Donc } D_u =]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $]2; +\infty[$ est définie sur :

$$D_u \cap]2; +\infty[=]2; +\infty[$$

$$x \in D_v \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } \sqrt{x+2} \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x + 2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_v = [-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $] -\infty; 2[$ est définie sur :

$$D_v \cap] -\infty; 2[= [-2; 2[$$

➤ Donc $D_f = [-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$, car $f(2) = \frac{8}{3}$

➤ D'où $D_f = [-2; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 2) \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

$$\begin{aligned}
 * \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{x+1} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + 5 - 3^2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2 - 2^2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\
 &= \frac{(2+2)(\sqrt{2+2} + 2)}{(\sqrt{2^2 + 5} + 3)} \\
 &= \frac{16}{6} \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Donc $* \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{8}{3}$

Exercic 05

1) Calculuer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0 \quad ; \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \text{ un réel}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} ; a > 0$$

2) Etudier suivant les valeurs des entiers n et m la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

3) Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{3}{2}, +\infty \right[- \{2\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}, a; b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer a et b pour que f admet une limite finie en 2

4) Soit g la fonction définit par :

$$g(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}, a; b \in \mathbb{R}$$

Déterminer a et b pour que g admet une limite finie en $+\infty$

Solution :

1) Calculuer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0 \quad ; \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \text{ un réel}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\sqrt{x^{2\alpha} + \beta} + x^\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned}
 *) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x^2 - a^2})^2} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x^2 - a^2)} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)}\sqrt{(x+a)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x-a)(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x+a)} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\
 &= \frac{0}{(2\sqrt{a})(2a)} - \frac{1}{\sqrt{2a}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2a}}
 \end{aligned}$$

2) Etudier suivant les valeurs des entiers n et m la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1$

Donc l'étude de : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$

est la même que celle de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n}$

➤ Si $m = n$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$

➤ Si $m > n$ alors $m - n > 0$ donc ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n} = 0$$

➤ Si $m < n$ alors $n - m > 0$: alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-m}}$

Si m et n de même parité alors $n - m$ est pair

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-m}} = +\infty$$

Si m et n sont de parité différente alors $n - m$ est impair

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{n-m}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{n-m}} = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ n'existe pas

3) Soit f la fct sur $\left] \frac{3}{2}, +\infty \right[- \{2\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$,

La fonction f admet une limite finie en 2 si et seulement si :

Si $b \neq 1$, alors $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$

On suppose $b = 1$ et on multiplie f par sa conjuguée,

On obtient $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Donc f admet une limite finie en 2 si et seulement si $a = 2$ et $b = 1$

4) Soit $g(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

La fonction g admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

Si $a \leq 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

On suppose $a > 0$ et on multiplie g par sa conjuguée, on obtient :

$$g(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$$

$$= \frac{(1-a^2)x^3 + (2-a^2b)x^2 + 3}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} + ax\sqrt{x+b}}$$

Donc g admet une limite finie en $+\infty$ ssi $a = 1$ et $b = 2$

Exercice 06

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$; ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)}$; iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \times \dots \times (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = n$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - (1 + \dots + 1 + 1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + x^2 - 1 + \dots + x^n - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 1 + (x + 1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ii i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{1 - \cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \dots + \cos^{n-1} x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x + \dots + \cos^{n-1} x)}{(1 + \cos x)} = \frac{n}{2}$$

iiii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \times \dots \times (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x} \quad (**)$

On pose $X = \frac{\pi}{2} - x$ donc $x = \frac{\pi}{2} - X$; et on a : $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$(**) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos X)(1 - \cos^2 X) \times \dots \times (1 - \cos^n X)}{(\sin^2 X)^n}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos X)(1 - \cos^2 X) \times (1 - \cos^3 X) \times \dots \times (1 - \cos^n X)}{(1 - \cos^2 X)^n}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{1 - \cos^2 X} \times \frac{1 - \cos^2 X}{1 - \cos^2 X} \times \frac{1 - \cos^3 X}{1 - \cos^2 X} \times \dots \times \frac{1 - \cos^n X}{1 - \cos^2 X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos X} \times 1 \times \frac{\cos^2 X + \cos X + 1}{1 + \cos X} \times \frac{\cos^{n-1} X + \dots + \cos X + 1}{(\cos X + 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{2} = \frac{n!}{2^n}$$

Définitions

f une fonction définie au voisinage de a ; $(]a - r; a + r[\subset Df)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ $(]a; +\infty[\subset Df)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0): (x > B \Rightarrow |f(x) - l| < A)$$

Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ $(]-\infty; b[\subset Df)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0): (x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < A)$$

Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ $(]-\infty; b[\subset Df)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0): (x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0): (x < -B \Rightarrow f(x) > A)$$

Exemples

1) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Soit $A > 0$ cherchons $B > 0$ tels que $x > B \Rightarrow x^2 > A$

$$x^2 > A \Rightarrow x > \sqrt{A}$$

D'où pour tout $A > 0$ il existe $B = \sqrt{A} > 0$ tels que $x > B \Rightarrow x^2 > A$

2) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Soit $A > 0$ cherchons $B > 0$ tels que $x > B \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < A$

$$\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < A \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} \right| < A \Rightarrow \frac{1}{x^2} < A \Rightarrow x^2 > \frac{1}{A} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{A}}$$

D'où pour tout A il existe $B = \sqrt{\frac{1}{A}} > 0$ tels que $x > B \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < A$

Propriétés: Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

➤ Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

➤ Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) =$	LL'	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour voir si le produit $+\infty$ ou $-\infty$

➤ Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour voir si le produit $+\infty$ ou $-\infty$

Les formes indéterminées sont, " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ "

Propriétés :

➤ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (\text{terme de plus haut degré})$

➤ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\text{terme de plus haut degré de } P)}{(\text{terme de plus haut degré de } Q)}$

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

➤ Si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

➤ Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

➤ Si $g \leq f \leq h$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$