

Exercice 01

1) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} & ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

b) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

c) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

2) Soit g la fct définie $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à (Cg) en 1

Exercice 02

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Étudier les variations de f .

Exercice 03

1) f une fonctions définis sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = x \cos x - \sin x$

a) Calculer $f'(x)$ sur $[0; \pi]$, puis étudier la monotonie de f

b) En déduire le signe de f sur $[0; \pi]$

2) g une fonctions définis sur $]0; \pi]$ par : $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) Calculer $g'(x)$ sur $]0; \pi]$ puis étudier les variation de g

b) Soient $a; b \in]0; \pi]$, en déduire que : $a < b \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$

Exercice 04

ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8cm$

Posons $AC = x$, et notons $P(x)$ le périmètre du triangle ABC

1) Montrer que $(\forall x \in]0; 8]) ; P(x) = \sqrt{64 - x^2} + x + 8$

2) Déterminer le périmètre maximale du triangle ABC

Exercice 05

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Etudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $-\infty$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter...

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0 ; x \in]-\infty; 1[$

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 06

Soit f une fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

b) Interpréter les résultats géométriquement

2) a) Montrer f est dérivable sur I et $(\forall x \in I) : f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) de la courbe (Cf) en 0 puis de la tangente (T') en $\frac{\pi}{2}$

3) Montrer que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (Cf)

4) Montrer que le point $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est le centre symétrie de (Cf)

5) Tracer $(T); (T')$ et (Cf) dans un repère orthonormé

Exercice 01

1) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} & ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

b) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

c) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

2) Soit g la fct définie $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à (Cg) en 1

Solution :

1) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} & ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x-1) = 4$$

b) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{x^2-6x+5}{x-5} - 4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{(x-5)(x-1)}{x-5} - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1) - 4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-5} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 5 et $f'(5) = 1$

c) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

La droite (T) d'équation $y = f'(5)(x-5) + f(5)$

Donc : $(T): y = x - 1$

2) L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

$(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$

On a $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Donc $g(1) = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1$

$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

Donc $g'(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + (n+1)$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2}\right)$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

Exercice 02

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Étudier les variations de f .

Solution

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+
$3x+1$	-	0	+	+
$\frac{2x}{3x+1}$	+	-	0	+

Donc la fonction f est définie sur $D_f =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup [0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = +\infty \quad ; \quad \left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^- \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3} \right)$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned}
 3)a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente en 1 d'équation :

$$y = f'_d(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{Donc : } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x-1|} \times \sqrt{|x-1|}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty
 \end{aligned}$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 1

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 1 dirigée vers le haut

4)a) Soit $x \in]1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ (fonction rationnelle)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

a) Soit $x \in]-\infty; 1[$

f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ (Somme de deux fonctions)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} + 1)} \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x})}
 \end{aligned}$$

c) On a f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

Donc $\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]-\infty; 1[$ est le signe de $-x$ qui s'annule en 0

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0; x \in]-\infty; 1[$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$f(x) = 0; x \in]-\infty; 1[\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-x) + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 0 \text{ ou } 1-x = 4$$

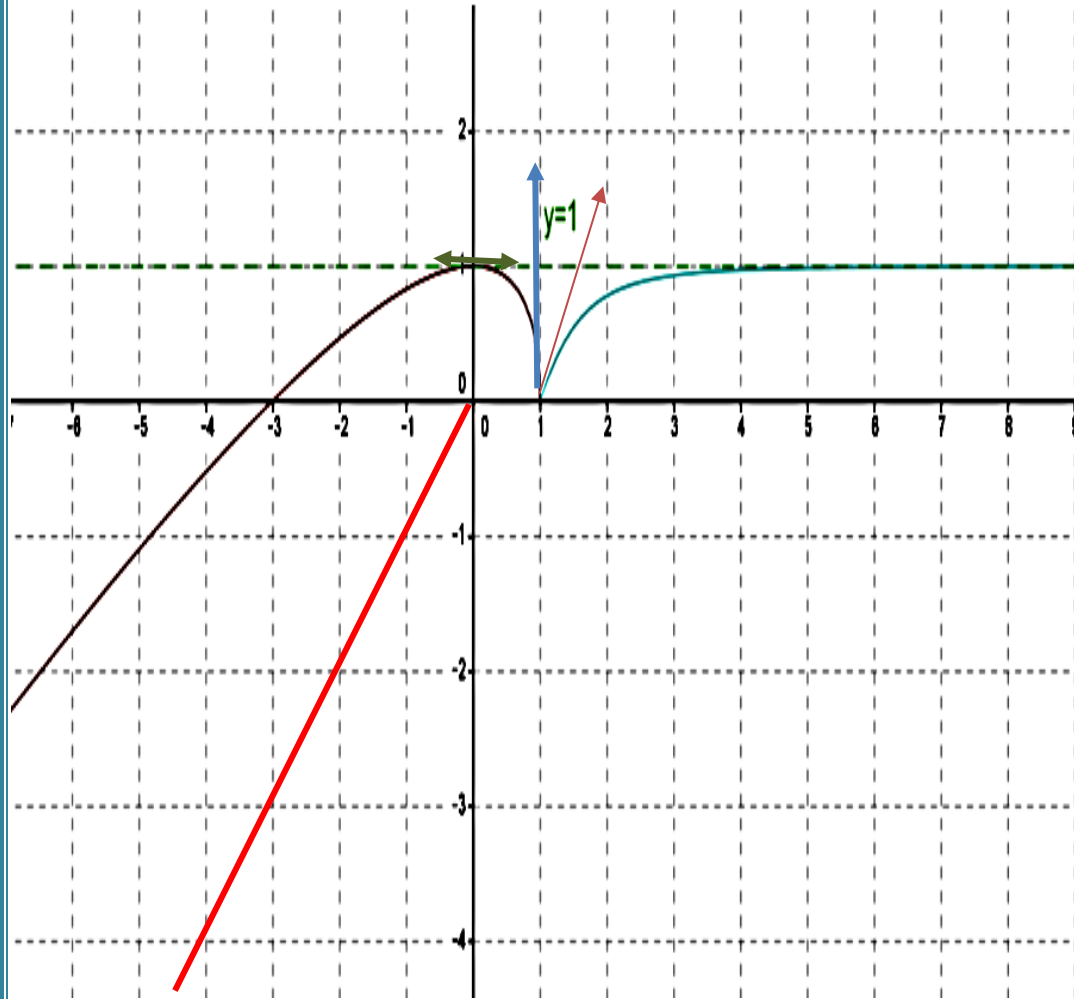
$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty; 1[\text{ ou } x = -3$$

Donc $S = \{-3\}$

Interprétation géométrique :

La courbe (Cf) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)



Exercice 03

1) f une fonctions définis sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = x \cos x - \sin x$

a) Calculer $f'(x)$ sur $[0; \pi]$, puis étudier la monotonie de f

b) En déduire le signe de f sur $[0; \pi]$

2) g une fonctions définis sur $]0; \pi]$ par : $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) Calculer $g'(x)$ sur $]0; \pi]$ puis étudier les variation de g

b) Soient $a; b \in]0; \pi]$, en déduire que : $a < b \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$

Solution

1) f une fonctions définis sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = x \cos x - \sin x$

a) Calculer $f'(x)$ sur $[0; \pi]$, puis étudier la monotonie de f

Soit $x \in [0; \pi]$

f est dérivable sur $[0; \pi]$ (Somme et produit de deux fonctions)

Rappels : $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; et $\sin'(x) = \cos(x)$

et $\cos'(x) = -\sin(x)$

Donc on trouve :

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

Etudier les variations de f

Soit $x \in [0; \pi]$, On a $f'(x) = -x \sin x$

On a : $-x < 0$ et $\sin x > 0$ donc $f'(x) < 0$

D'où la fonction f est strictement décroissante sur $[0; \pi]$

x	0	π
$f'(x)$		—
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(\pi) = -\pi$

b) Etude de signe de fonction f sur $[0; \pi]$

Soit $x \in [0; \pi]$,

$$x \in]0; \pi[\Rightarrow 0 \leq x \leq \pi$$

$$\Rightarrow f(\pi) \leq f(x) \leq f(0) ; \text{ car } f \text{ est décroissante sur } I$$

$$\Rightarrow -\pi \leq f(x) \leq 0$$

D'où $\forall x \in [0; \pi] : f(x) \leq 0$

2)a) Soit $x \in]0; \pi[$

g est dérivable sur $[0; \pi]$ (Somme et produit de deux fonctions)

$$g'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \frac{-f(x)}{x^2}$$

Etudions les variations de g

Soit $x \in]0; \pi[$,

$$\text{On a : } g'(x) = \frac{-f(x)}{x^2}$$

On a : $x^2 > 0$ et on a : $f(x) < 0$ donc : $g'(x) > 0$

D'où la fonction g est strictement croissante sur $]0; \pi[$

b) Dédire que : $a < b \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$

Soient $a, b \in]0; \pi]$ tels que $a < b$

$a < b \Rightarrow g(a) < g(b) ; \text{ car } g \text{ est croissante sur }]0; \pi[$

$$\Rightarrow \frac{\sin a}{a} < \frac{\sin b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} \quad \text{car } \sin b > 0$$

Exercic 04

ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8\text{cm}$

Posons $AC = x$, et notons $P(x)$ le périmètre du triangle ABC

1) Montrer que $(\forall x \in]0; 8[) ; P(x) = \sqrt{64 - x^2} + x + 8$

2) Déterminer le périmètre maximale du triangle ABC

Solution

1) Montrer que $(\forall x \in]0; 8[) ; P(x) = \sqrt{64 - x^2} + x + 8$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 8\text{cm}$; Posons

$AC = x$; donc $x \in]0; 8[$ car $BC = 8$

Notons $P(x)$ le périmètre du triangle ABC

Soit $x \in]0; 8[$ donc $P(x) = AB + AC + BC$

Conculons AB en fonctions de x

D'apés théorème de pithagore on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\text{Donc : } AB^2 + x^2 = 64$$

$$\text{donc } AB = \sqrt{64 - x^2}$$

D'où $\forall x \in]0; 8[; P(x) = \sqrt{64 - x^2} + x + 8$

2) Déterminer le périmètre maximale du triangle ABC

$$\begin{aligned}
 P'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{64 - x^2}} + 1 = \frac{-x}{\sqrt{64 - x^2}} + 1 \\
 &= \frac{\sqrt{64 - x^2} - x}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{(\sqrt{64 - x^2} + x)\sqrt{64 - x^2}}
 \end{aligned}$$

$$P'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{64 - 2x^2}{(\sqrt{64 - x^2} + x)\sqrt{64 - x^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow 64 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 32$$

$$\Rightarrow x \leq \sqrt{32} , \text{ car } x \in]0; 8[$$

$$\Rightarrow x \leq 4\sqrt{2}$$

x	0	$4\sqrt{2}$	8
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$8 + 8\sqrt{2}$	

Remarque :

Donc il existe un triangle ABC ayant un périmètre supérieur ou égale à tous les autres ses dimensions sont :

$$AC = 4\sqrt{2}; AB = \sqrt{64 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad BC = 8$$

De plus le périmètre maximale du triangle ABC est $8 + 8\sqrt{2}$

Exercice 06

Soit f une fonction définie sur $I = \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

b) Interpréter les résultats géométriquement

2) a) Montrer f est dérivable sur I et $(\forall x \in I): f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$

b) dresser le tableau de variations de f sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) en 0 et de la tangente (T') en $\frac{\pi}{2}$

3) Etudier la convexité de (Cf) puis justifier que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (Cf)

4) Montrer que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est centre symétrie de (Cf)

5) Tracer (T) et (Cf) dans un repère orthonormé

Solution :

Soit f une fonction définie sur $I = \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

1ère méthode :

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \cos x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} 1 + \sin x = 0$,

c'est un F.I de type $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} 1 - \sin x = 1 - (-1) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \cos x = 0^+$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\
 &= \frac{2}{0^-} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} 1 - \sin x = 1 - (-1) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \cos x = 0^-$$

2ème méthode :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \cos x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} 1 + \sin x = 0$, c'est un F.I de type " $\frac{0}{0}$ "

On pose : $t = \sin x$ donc $x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+ \Leftrightarrow t \rightarrow -1^+$

$$t = \sin x \Leftrightarrow t^2 = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$\Leftrightarrow |\cos x| = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{1 - t^2}, \text{ car } x > \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{(1 - t)(1 + t)}}{\sqrt{1 + t}^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1 - t}}{\sqrt{1 + t}} = +\infty$$

De même on pose $t = \sin x$ donc $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^- \Leftrightarrow t \rightarrow -1^+$

$$t = \sin x \Leftrightarrow |\cos x| = \sqrt{1 - t^2} \Leftrightarrow \cos x = -\sqrt{1 - t^2}, \text{ car } x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{-\sqrt{1 - t^2}}{1 + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{\sqrt{(1 - t)(1 + t)}}{\sqrt{1 + t}^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{\sqrt{1 - t}}{\sqrt{1 + t}}$$

$$= -\infty$$

b) Interpréter les résultats géométriquement

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à (Cf)

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = \frac{3\pi}{2}$ est une asymptote verticale à (Cf)

2) a) Montrer f est dérivable sur I et $(\forall x \in I): f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$

La fonction f est dérivable sur I (car f c'est une quotient de deux fonctions dérivable sur I et $(\forall x \in I): 1 + \sin x \neq 0$)

Soit $x \in I$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - (1 - \sin^2 x)}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - (1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{(1 + \sin x)[- \sin x - 1 + \sin x]}{(1 + \sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

b) dresser le tableau de variations de f sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

b) Soit $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$; on a : $f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x} < 0$, car $-1 < \sin x$

Donc f est strictement décroissante sur I

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$  $-\infty$	

c) L'équation de la tangente (T) en 0 et de (T') en $\frac{\pi}{2}$

On a $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$, donc : (T): $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
 (T): $y = -x + 1$

L'équation de la tangente (T') en $\frac{\pi}{2}$

On a $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{1+\sin x} = -\frac{1}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc :

(T'): $y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$, donc (T'): $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$

3) Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$$f''(x) = -\frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

On a $(1 + \sin x)^2 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ c'est le signe de $\cos x$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$	+	0	-
La convexité de la courbe (Cf)	convexe ∪	le point $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est point d'inflexion	concave ∩

La fonction f'' s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{2}$ donc le point

$A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est un point d'inflexion de (Cf)

4) Montrer que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est centre symétrie de (Cf)

$$* x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi - x < \frac{3\pi}{2}$$

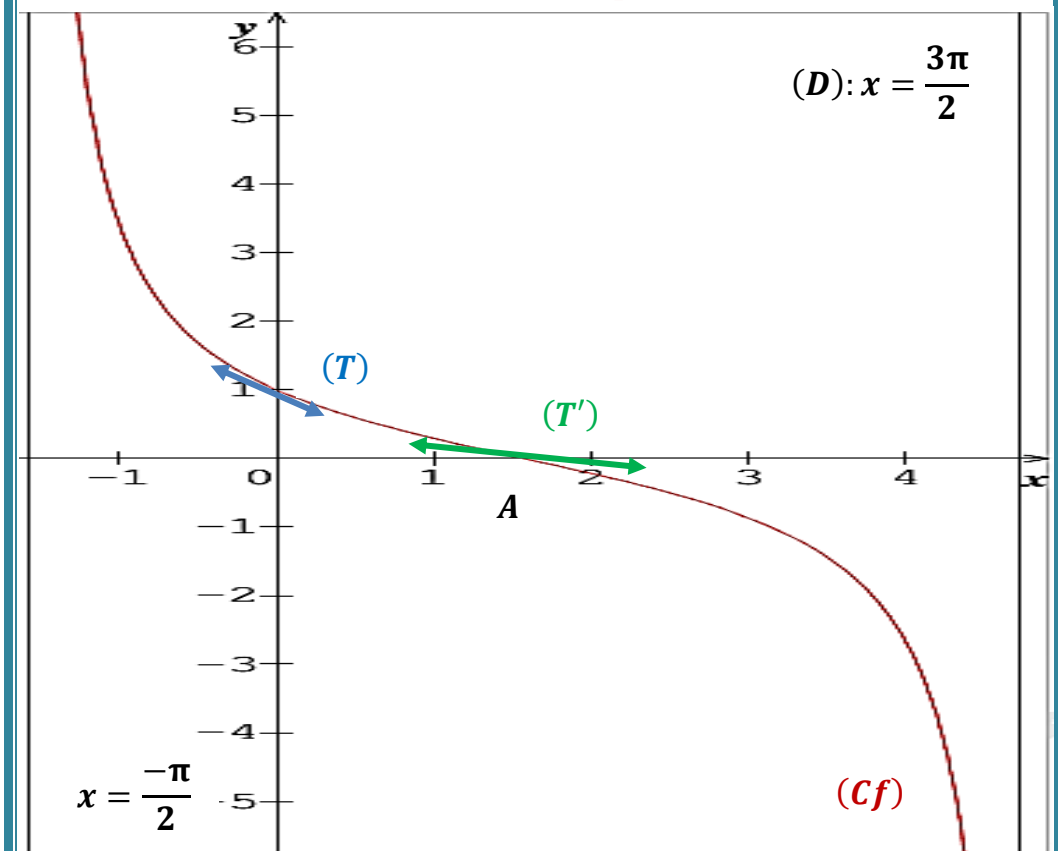
$$\Leftrightarrow x - \pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$$

$$* f(x - \pi) + f(x) = \frac{\cos(x - \pi)}{1 + \sin(x - \pi)} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{-\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0 = 0 \times 2$$

Donc $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est le centre symétrie de (Cf)

5) Tracer (T) ; (T') et (Cf) dans un repère orthonormé



A) Dérivabilité d'une fonction en un point

1) Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = l$; ($l \in \mathbb{R}$)

Alors la fonction f est dérivable en a et on a : $f'(a) = l$

Interprétation géométrique:

Si la fonction f est dérivable en a alors la courbe (Cf) admet une droite tangente (T) au point $A(a; f(a))$ d'équation :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2) Dérivabilité à gauche et à droite de a et Interprétation géométrique:

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$, alors f est dérivable à droite de a et $l = f'_d(a)$

Inter géo : (Cf) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ tel que $x > a$

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ alors f est dérivable à gauche de a et $l = f'_g(a)$

Inter géo : (Cf) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ tel que $x < a$

Propriété : Si $f'_d(a) = f'_g(a)$ alors la fonction f est dérivable en a

3) Tangente parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ alors f est non dérivable en a et on :

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

B) u et v des fonctions dérivables sur l'intervalle I et k un cts ; n entier

la fonction f	$D_{f'}$; Condition	Dérivée f'
1) $f(x) = k$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
2) $f(x) = kx$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = k$
3) $f(x) = x^n$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
4) $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
5) $f(x) = \sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$	$D_{f'} =] 0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $f = u + v$	$D_{f'} = I$	$f' = u' + v'$
7) $f = k u$	$D_{f'} = I$	$f' = k u'$
8) $f = u \cdot v$	$D_{f'} = I$	$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$
9) $f(x) = \frac{u}{v}$	$v \neq 0$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
10) $f(x) = \frac{1}{v}$	$v \neq 0$	$f'(x) = \frac{-v'}{v^2}$
11) $f(x) = \sqrt{u}$	$u > 0$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12) $f(x) = u^n$	$D_{f'} = I$	$f' = n u' u^{n-1}$
13) $f(x) = \sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
14) $f(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
15) $f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$
16) $f(x) = \sin(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
17) $f(x) = \cos(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$

Propriété : f une fonction dérivable sur un intervalle I

- $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est croissante sur I
- $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est décroissante sur I
- $(\forall x \in I); f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est constante sur I

Convexité de (Cf) et les Points d'inflexions

Si $f'' \geq 0$ sur I alors (Cf) est **convexe** sur I $\cup$

Si $f'' \leq 0$ sur I alors (Cf) est **concave** sur I $\cap$

Si f'' s'annule et change le signe en a alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est point d'inflexion de (Cf)
(Cf) *traverse la tangente* en $A(x_0; f(x_0))$

Position relative de (Cf) et une droite (Δ)

la **position relative** de (Cf) et (Δ): $y = ax + b$

dépend de **signe de $f(x) - (ax + b)$**

x	x_0		
$f(x) - (ax + b)$	--	0	+
Position relative de (Cf) et (Δ)	(Cf) est au dessous de (Δ)	point d'inter $A(x_0; f(x_0))$	(Cf) est au dessus de (Δ)

Points d'intersections de (Cf) avec (Ox)

Les points d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses (Ox) sont les points dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Éléments de symétrie

Le point $I(a; b)$ est **centre de symétrie** de (Cf) ssi $(\forall x \in D_f)$:

$$(2a - x) \in D_f$$

et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

la droite d'équation (D) : $x = a$ est **un axe de symétrie** de (Cf) ssi $(\forall x \in D_f)$:

$$(2a - x) \in D_f$$

et $f(2a - x) = f(x)$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

On calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

Et si on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$$

On calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$$

La droite (D) : $y = L$ est **asymptote horizontale** e à (Cf) voisinage de ∞

La droite (Δ) : $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à (Cf) voisinage de ∞

(Cf) admet **branche.P** de direction la droite d'équation (Δ) : $y = ax$ Au voisinage de ∞

(Cf) admet **branche parabolique** de Direction (O_y) Au voisinage de ∞

(Cf) admet **une branche parabolique** de Direction la droite (O_x) Au voisinage de ∞

La droite (D) d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à (Cf)

