

Exercice 1

Partie A

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}.$$

1. Démontrer qu'il existe couple (u, v) d'entiers d'entier relatifs tel que : $19u + 12v = 1$ (on ne demande pas cette question de donner un exemple de couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19v$ est solution de (S).
2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}.$$

- b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à

$$n \equiv n_0[12 \times 19].$$

3. a. Démontrer que le couple $(u; v)$ solution $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
- b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 2

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$. où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
3. Quelle est la parité de p et q ?

Partie B

On admet que 250507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a; b)$ vérifiant la relation

$$(E): a^2 - 250507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.

- a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis les restes possibles de X^2 modulo 9.
- b. Sachant que $(E): a^2 - 250507 = b^2$. ; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
- c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.
3. On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E).
 - a. Démontrer que a est congru à 501 ou 505 modulo 9.
 - b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple de solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 3

1. On considère l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
 - b. Résoudre (E). En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tel que $1109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels $a \leq 226$. On considère les fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : A tout entier a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227. A tout entier a de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

- a. vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat : **Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.**

- b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A , $a^{226} \equiv 1[227]$.

c. En utilisant 1.b, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A , $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

Exercice 4

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b; ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2 . (on remarque

$$a^2 = a(a+b) - ab)$$

b. En déduire que p divise b .

On constate donc, de même, que d divise b .

c. Démontrer que $\text{PGCD}(a; b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a+b, ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$$

Exercice 5

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$; $13 = 9+2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$. $a \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$. $a \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

Exercice 6

Pour tout entier naturel n , non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1. a. Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donné ci-dessous que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (1) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a. Justifier le fait que (1) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice 7

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$.

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). 2. Soit $(O; i, j, k)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O; i, j)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.

Déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.