

TS1 / Fonction ln et expo

Exercice 1

Calculer les limites suivantes de f au point x_0 :

a) $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$; $x_0 = +\infty$; b) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$; $x_0 = +\infty$

c) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$; $x_0 \in \{+\infty; 0\}$;

d) $f(x) = \ln|x^2 - 4| - |x - 2|$; $x_0 \in \{-\infty; +\infty\}$

e) $f(x) = \frac{\ln|1 - |x||}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$

f) $f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$;

g) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $x_0 \in \{0; +\infty\}$

h) $f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$;

i) $f(x) = \frac{x \ln x}{x - \ln x}$; $x_0 \in \{+\infty; 0\}$

j) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - |\ln(x + 1)|$; $x_0 \in \{-1; +\infty\}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left(\frac{x^3 + 4}{1 - x^2} \right)$; h) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$; j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$;

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} \quad ; \quad m) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} \quad ; \quad n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}} \quad ; \quad p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}} \quad ; \quad q) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}} \quad ; \quad s) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{(x+1)}} \quad ; \quad t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$$

Exercice 3

Etudier les limites suivantes :

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{-x^2+1} \quad b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}} \quad c. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} \quad d. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\ln x}{x^2} \quad f. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{x^2} \quad g. \lim_{x \rightarrow +1^-} \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad i. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{x}} \quad j. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$k. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0; \beta > 0) \quad l. \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta \quad (\alpha > 0; \beta > 0)$$

$$m. \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) e^{\frac{1}{\tan x}} \quad n. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad o. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{6}} + 2x}$$

Exercice 4

1. On considère la fonction f_2 définie sur $]0; +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2 .

2. Dans l'annexe ci-joint on a tracé, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

- a) Soit $x > 0$, on considère les points M et M_2 de même abscisses x et appartenant respectivement à (L) et (C) . Vérifie que $MM_2 = f_2(x)$.
- b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisse respective 2 , $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.
- c) Trace la courbe (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

II. 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$

- a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k .
- b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$.
- c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

- a) Vérifie que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire que la limite de (u_k) .
- b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k; f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 4cm) n étant un entier naturel non nul. On s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x : $(E_n) : x + e^x - n = 0$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^x - n$

On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

Partie A

1. a) Vérifie que pour tout réel x est strictement positif, $\ln x - x < 0$.
- b) Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $\left] \ln\left(\frac{n}{2}\right); \ln n \right]$.

c) En déduire les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n}$

d) Calculer u_1

2. Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x + e^x - n = 0 \Leftrightarrow e^x = n - x$

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

b) A l'aide des variations de f_n , étudier les variations de la suite (u_n) .

c) On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n} .

Montrer que : $A_n = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$

Vérifie que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n , on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

3. a) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifie qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait :

$$\ln(h+1) = h + h\varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

b) On pose $\alpha_n = \frac{u_n}{\ln n} - 1$ c'est-à-dire que $u_n = \ln n + \alpha_n \ln n$.

Quelle est la limite de (α_n) ?

c) Déterminer une suite (y_n) telle que $u_n = \ln n + \ln(1 + y_n)$

Déduire alors la question (3.a) qu'il existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que : $u_n = \ln n - \frac{u_n}{\ln n} + \beta_n \frac{\ln n}{n}$

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2 .

D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle $[0 ; \ln 2]$.

On note g l'application de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [0 ; 1], g(x) = \ln(2 - x) \text{ et on pose : } b = \frac{2}{3} \ln 2 \text{ et } a = g(b).$$

1. a) Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a ; b]$.

b) Prouver que g est dérivable sur I et $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g(b)|$.

Enoncé clairement le théorème qui permet d'en déduire que

$$\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)| |x - y|$$

c) Vérifier que $g(I) \subset I$.

2. On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = g(a_n)$.

a) Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n , a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et pour tout entier naturel n , a_n appartient à I .

b) Démontrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n (b - a)$
En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que (a_n) soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?

3. Représenter sur un même graphique, restrictions de g, f_2 à l'intervalle $[0 ; 1]$, le domaine A_2 , la droite d'équation $y = x$ les points de coordonnées respectives $(a, 0), (u_2, 0), (u_3, 0)$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par : $f(x) = 1 - x^2 + \ln(1 - x)$

1. a) Etudier la fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

Vérifie que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ avec $\beta = 1 - \frac{1}{e}$

2. a) Soient p et q les fonctions définies sur $\left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ respectivement par :

$$p(x) = |f'(x)| \text{ et } q(x) = |f''(x)|.$$

Etudier les variations de p et q et dresser leurs tableaux de variations.

b) En déduire que $\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right], \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq M$ avec $M = \frac{e^2 + 2}{3}$.

3. Soit t un élément de $] \alpha, 1[$.

a) Calculer $\int_{\alpha}^t \ln(1 - x) dx$

b) Calculer $\int_{\alpha}^t f(x) dx$ et montrer que $\int_{\alpha}^t f(x) dx = p(\alpha)$ où p est un polynôme à déterminer.

Partie B : Les questions 1. et 2. Sont indépendantes.

1. Soient u et v deux réels tels que $u < v$.

Soit h une fonction définie sur intervalle ouvert contenant l'intervalle $J = [u, v]$, dérivable jusqu'à l'ordre 2 et ayant u comme unique zéro dans J . On suppose que h est négative sur J ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et que $\forall x \in J, h'(x) \neq 0$.

On considère la fonction T définie sur J par $T(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$

a) Soit a un élément de J et A le point d'abscisse a de la courbe (C_h) représentative de h dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Vérifie que $T(a)$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à (C_h) en A avec l'axe des abscisses.

Montrer que T est dérivable en J et monotone ; dresser son tableau de variation. En déduire que $T(J) \subset J$.

On pose $x_0 = v$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = T(x_n)$

b) Montrer que la suite (x_n) est bien définie et bornée. Vérifier qu'elle est monotone, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et deux fois dérivables.

Soit k un réel fixé, on considère la fonction G définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b], G(x) = g(a) - g(x) - (a - x)g'(x) - \frac{1}{2}k(a - x)^2$$

a) Calculer $G(a)$. Déterminer k pour que $G(b)$ soit égal à 0.

Désormais k prend cette valeur.

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à G dans l'intervalle $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que $G'(c) = 0$.

En déduire que : $g(a) = g(b) + (a - b)g'(b) + \frac{1}{2}(a - b)^2 g''(c)$.

Partie C : Application à la fonction f .

1) a) Démontrer que la fonction f satisfait dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, aux hypothèses faites sur la fonction h de la partie B.

On considère la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = \beta$ et pour tout

$$\text{entier naturel } n : x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel c_n dans $] \alpha, x_n[$ tel que : $f(a) = f(x_n) + (a - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(a - x_n)^2 f''(c_n)$.

c) En déduire que :

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \quad \text{et} \quad x_{n+1} - \alpha \leq \frac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$$

2) Pour tout entier naturel n , on pose $\delta_n = \frac{M}{2}(x_n - \alpha)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$\delta_n \leq \delta_0^{2^n} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n} \quad (\text{Remarque que } \delta_0 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha) \leq \frac{M}{4})$$

b) Déterminer un entier naturel n tels que , $x_n - \alpha$ soit inférieur à 10^{-5} et une valeur approchée de α à 10^{-5} près par excès.

Exercice 7

A. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C_f) .

3) Soit λ un réel de $]0; 1[$. On considère par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda$.

B. 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0; 1[$ et $[1; +\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0; 1[$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur l'intervalle I .

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0; +\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n , deux suites réelles (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

3) On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifie que les fonctions $u: \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v: \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0; +\infty[$ et dérivables sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_n) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Exercice 8

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution α dans l'intervalle $] -\infty; 0[$ et une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + \ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g des fonctions φ , f et g et la droite d'équation $y = x$.

1) Soit a un réel et un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe (C_f) au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe (C_g) au point B d'abscisse b ;

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b .

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$)

Dans la suite on se propose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si

$$\left(a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1} \right)$$

b) En déduire que Δ_a est la tangente à la courbe (C_f) et à la courbe la (C_g) respectivement aux points $A(a; f(a))$ et $B(e^{-a}; g(e^{-a}))$.
(e^{-a} étant la valeur définie dans I.2)

c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), le point $A(a; f(a))$.

b) Vérifie que $e^{-a} = f(-a) - a$ puis construire $B(e^{-a}; g(e^{-a}))$.

c) Tracer Δ_a

Exercice 9

Partie A : Soit $f_n(x) = (2 - x)e^x - n$

1) a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier le sens de variation de f_n

c) Dresser le tableau de variation de f_n

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_n \in]-\infty; 1[$ et $\beta_n \in]1; +\infty[$.

b) Montrer que : $e^{\alpha_n} - n\alpha_n = (e^{\alpha_n} - n)(\alpha_n - 1)$

De même montrer que : $e^{\beta_n} - n\beta_n = (e^{\beta_n} - n)(\beta_n - 1)$

c) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant x

Partie B

Soit U définie par $U(x) = e^x - nx$

- 1) Etudier les limites de U en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudier le sens de variation de U .
- 3) Dresser le tableau de variation de U . En déduire le signe de $U(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C

On considère la fonction h_n définie par : $h_n(x) = \frac{e^x - n}{e^x - nx}$

- 1) a) Quel est l'ensemble de définition D_{h_n} de h_n ?
b) Déterminer les limites de h_n sur D_{h_n}
- 2) Calculer $h'_n(x)$. En déduire le sens de variation de h_n sur D_{h_n} .
- 3) Montrer que $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n - 1}$ et $h_n(\beta_n) = \frac{1}{\beta_n - 1}$.

Dresser le tableau de variation de h_n sur D_{h_n} .

- 4) On note les points M_n et N_n d'abscisses respectives α_n et β_n .
Montrer que lorsque n varie les points M_n et N_n sont sur une courbe fixe Γ dont-on déterminera une équation.
- 5) Démontrer que la fonction H_n définie par : $H_n(x) = \ln(e^x - nx)$ est une primitive de h_n .

Partie D : Cas $n = 1$ ou $n = 2$

- 1) Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression de $h_2(x) - h_1(x)$
- 2) En déduire la position relative des courbes C_{h_1} et C_{h_2} et montrer qu'elles se coupent en un points dont on précisera son ordonnée.
- 3) Prouver que $\alpha_2 = 0$
- 4) Construire C_{h_1} , C_{h_2} et Γ .

Prendre unité $2\text{cm} \times 5\text{cm}$; $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = -1,8$; $\beta_1 = -1,6$.

- 5) Soit λ un réel strictement supérieur à 1.
 - a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan défini par $1 \leq x \leq \lambda$ et par $h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$
 - b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand tend vers $+\infty$