

TS1 : Suites numériques

Exercice 1 :

On appelle le principe des dominos : si u est une suite et si p et q sont des entiers tels

que : $0 \leq p \leq q$ alors on $\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$.

Une telle somme est appelée somme télescopique. Evidemment la majorité des termes s'annule et la somme vaut $u_{q+1} - u_p$. Voici quelques exemples.

1) Simplifier les sommes suivantes :

$$a = \sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) \quad \text{et} \quad b = \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

2) Simplifier les sommes : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A(n) = \sum_{k=0}^n k.k! \quad \text{et} \quad B(n) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

Indication : remarquer que $k = (k+1) - 1$ et transformer en somme télescopique.

3) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \text{ En déduire le calcul de } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

a) $\forall n \geq 1, \quad 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$; b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geq n+1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$; d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a-b) \left(\sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k} \right) = a^n - b^n$, où a et b sont des réels non nuls

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!$; g) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (Th. de CATALAN)

Exercice 3

1) Linéariser $\sin^3 x$. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^n 3^k \sin^3 \left(\frac{\alpha}{3^{k+1}} \right)$

2) En remarquant que : $\sin x = \sin[(k+1) - kx]$.

En déduire la somme : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos(k\theta) \cos((k+1)\theta)}$

Exercice 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $T_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

a) Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (1+u_k)^2 = 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$.

c) En déduire que $T_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \frac{u_n}{2n+1}$, $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

a) Déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{2n+1} = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n w_k - \frac{1}{n+1} - 3 \right)$.

3) On pose : $y_1 = 1$ et $y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 u_k^2}$ pour tout $n \geq 2$.

a) Exprimer y_n en fonction de w_n pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k} = 18 + 24x_{2n+1} + \frac{6}{n+1}$.

Exercice 5

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 6

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n < 1$.

b) Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $u_n \geq \frac{1}{2}$

c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2) Soit v la suite de terme général : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = v_n^2$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$.

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$. Calculer p_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p_n}{v_{n+1}} \right)$.

3) Soit la suite S_n définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < 1 - u_n < \frac{1}{1+u_0^2} (1 - u_{n-1})$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 - u_n < \left(\frac{4}{5} \right)^n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{5}{n} \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right] \leq S_n \leq 1$. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 7

1) Soit la fonction : $f : x \mapsto f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

a) Étudier les variations de f . Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

b) Montrer que si : $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ alors $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$.

2) Soit la suite réelle u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. Étudier la monotonie de u .

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n .

b) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq S_n \leq 3n$.

b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

5) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $r_n = \frac{S_n}{n}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $nS_{n+1} - (n+1)S_n = nu_n^2 - S_n$.

b) En déduire que (r_n) est une suite croissante.

c) Montrer que (r_n) est une suite convergente.

6) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.

a) Montrer que $(n-p)u_p^2 \leq S_n \leq nu_{n-1}^2$. En déduire que : $\left(\frac{n-p}{n}\right)u_p^2 \leq r_n \leq u_{n-1}^2$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_p^2 \leq l \leq 3$. En déduire la valeur de l .

Exercice 8

On considère la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{2+u_n} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $w_n = \frac{8}{3} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^n - 1 \right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer alors la limite de la suite (w_n) .