



INSTITUT MBACKÉ MATHS

COURS PRIVÉS EN LIGNE

(+221) 70 713 09 21

Matière : MATHÉMATIQUES

Niveau : Terminale S1

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Série d'exercices

❖ Exercice 1 :

1) $r(x) = E\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]$; $f(x) = (-1)^{r(x)}\left[\frac{x}{2} - r(x)\right]$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, r(x+4) = r(x) + 2$.

b) En déduire que f est périodique.

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x + a}{x - 1}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Préciser l'ensemble de définition.

b) Pour quelles valeurs de a , f admet-elle un prolongement par continuité ?

3) $f(x) = \sqrt{1+x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

a) Etudier les variations de f .

b) Déterminer son minimum et en déduire que $\forall a$ et b deux réels strictement positifs, on a :

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$$

4) $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Montrer que $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - \frac{9}{4}f(x) = 0$.

5) $f_m(x) = mx^2 + (1-2m)x + m$.

Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ de f_m sont tangentes entre elles.

$$6) f_a(x) = \frac{(x-a)(ax+1)}{x^2+1}.$$

a) Pour quelle transformation passe-t-on de $\mathcal{C}_a$ à $\mathcal{C}_{-a}$.

b) Etudier les variations de f_a pour $a \geq 0$.

$$7) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}.$$

a) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = (ax+b)\sqrt{x+3}$ soit une primitive de f .

b) Donner la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.

❖ Exercice 2 :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

1) Etudier les variations de f .

2. a) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $x = 0$.

b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

3) Tracer $\mathcal{C}_f$.

4) $x_1 = 1, x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0; 1]$.

b) Montrer que $x_{n+1} \leq x_n$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$.

6) Montrer que la suite x_n converge et préciser sa limite.

❖ Exercice 3 :

Partie A :

$$h(x) = \tan x \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Etudier les variations de h .

2) Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

3. a) Montrer que pour tout a et b avec $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ on a :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$x \leq \tan x \leq \frac{x}{\cos^2 x} \text{ et puis que } \sin x \leq \frac{x}{\cos^2 x}$$

c) Déduire de ce qui précède que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on a : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

En déduire que la fonction $v(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$ est dérivable en $x = 0$ et préciser $v'(0)$.

4) Montrer que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$.

Partie B :

1) Montrer que f est une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle à préciser.

2) Soit g la bijection réciproque de f , donner le tableau de variation de g .

3) Préciser la transformation qui permet d'obtenir $\mathcal{C}_g$ à partir de $\mathcal{C}_f$.

Partie C :

$\varphi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.

1) Etudier la continuité de φ en 0.

2) Donner le tableau de variation de φ sur $]0; +\infty[$.

3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$ et $\mathcal{C}_\varphi$ est l'image de $\mathcal{C}_g$ par la symétrie orthogonale d'axe $y = \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que φ est dérivable en 0.

En déduire $\varphi'(0)$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4) Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Montrer que $0 < \varphi(a) - \varphi(b) < \frac{\pi}{2}$ et $\tan[\varphi(a) - \varphi(b)] = \frac{b-a}{1+ab}$.

Partie D :

$U_n = \varphi(n^2 + 3n + 3)$ $n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier la convergence de U_n .

2) Prouver que : $U_n = \varphi(n+1) - \varphi(n)$.

3) $S_n = \sum_{p=0}^n U_p$.

Exprimer S_n en fonction de $\varphi(n+2)$ et montrer que S_n est convergente vers une limite l à préciser.

❖ Exercice 4 :

Soit f_0 la fonction définie sur $] -\infty ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, f_n est la fonction définie sur $] -\infty ; 1]$ par $f_n = x^n \sqrt{1-x}$.

A.1) Dresser le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$, en distinguant les cas : n pair et n impair.

Déterminer l'unique élément $\alpha_n \in]0 ; 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$, $n \geq 1$.

2) Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1, f_2 .

B.1) Déterminer graphiquement, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = k$.

2) Montrer que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2, x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad ; \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3) Pour $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$, on pose alors : $u_i = \frac{3}{2} \left(x_i - \frac{1}{3} \right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0 ; \pi]$ tel que : $u_i = \cos \theta_i$.

4) Montrer que θ_1, θ_2 , et θ_3 sont les solutions de l'équation : $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0 ; \pi]$.

5) Donner alors une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2 et x_3 .

❖ Exercice 5 :

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie par :

(i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$

(ii) $f(1) = a$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$. Calculer $f(0)$.

2) Montrer que pour tout réels x et y : $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ et $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$.

3. a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout réel x : $f(nx) = [f(x)]^n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x)}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = [f(x)]^n$.

d) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = a^r$.

4) Montrer que si f est continue en 0 alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que si f est dérivable en 0 alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

❖ Exercice 6 :

A) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$.

1) Etudier φ sur $[0, 1]$, en déduire que $\frac{6}{5}$ majore φ sur cet intervalle.

2) Prouver que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\varphi(x) < \frac{2}{x^3}$.

3) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = \varphi(x)$.

a) Déduire des questions précédentes une majoration de $f(1)$ et une autre de la fonction f sur $[1; +\infty[$ par une fonction g .

Indication : Appliquer l'inégalité des Accroissements Finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$.

b) Montrer que f admet une limite l en $+\infty$. Préciser un encadrement de l .

B) Soit la fonction définie ainsi : $\alpha : \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \sqrt{\tan x}$

1) Etudier la dérivabilité de α en chacun des points de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \alpha'(x) = \frac{1 + [\alpha(x)]^4}{2\alpha(x)}$.

2) Etudier les variations de α et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

3) Montrer que α admet une fonction réciproque α^{-1} ; préciser les propriétés de α^{-1} (ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, sens de variation) ; donner la valeur exacte de $\alpha^{-1}(1)$.

4) Soit $\beta = f \circ \alpha$. Montrer que β est dérivable sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et que $\beta'(x) = 1$ pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

En déduire que $\alpha^{-1} = f$. Donner alors la valeur exacte de $\lim_{+\infty} f$.

5) Construire dans le repère du 2) la courbe de f .

❖ **Exercice 7 :**

Démontrer que pour tout nombre réel a, b de l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Institut

MBACKÉ MATHS

Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez



INSTITUT MBACKÉ MATHS

Cours privées en ligne International en MATHS, PC, SVT



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

$$-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$V = Lwh$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Cours privés en ligne international

(Année 2023-2024)

Niveau

Terminale S2 // S1

Première S2 // S1

3eme

Seconde S

Options au choix

Option A Maths - PC -SVT

Option B Maths - PC

Option C Maths

Annales avec correction en vidéo réservés aux élèves des cours en ligne

Les cours débutent le 7 Novembre 2023.

Les inscriptions ont démarrées et se poursuivent

Inscrivez-vous maintenant au +221 70 713 09 21



Faites-vous encadrer par des **professeurs réputés au Sénégal**



Obtenez notre fascicule réservés aux membres des cours en ligne de l'Institut Mbacké Maths



Faites parti des **meilleurs de votre classe** et réussissez votre année avec distinction



Mbacké Maths

Visitez notre chaine Youtube



+221 70 713 09 21



mbaces883@gmail.com



Dakar, Sénégal