

Série n° 1 : Complément d'analyse

Prénom(s) :

NOM :

 Exercice 1

Toutes les questions sont indépendantes

- ❶ Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) \neq f(1)$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in]0; 1[$ tel que $2f(c) = f(0) + f(1)$.
- ❷ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs.
Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$
- ❸ Soit g une fonction continue sur $[0; 1]$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k)$.
- ❹ Soit h une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $h(0) = h(1)$.
Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $h(\alpha) = h\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$.
- ❺ Soit m une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $m(a) < 0$.
Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]a; b[$ tel que $m(\alpha) = \frac{a - \alpha}{b - \alpha}$.
- ❻ Soient $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $\forall x \in]a; b[, g'(x) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Indication : Considérer la fonction $h : x \mapsto [g(x) - g(a)] \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] - f(x) + f(a)$

 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \cos x$.

- ❶ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution λ et que $\lambda \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right[$.
- ❷ Démontrer qu'il existe $\lambda \in \left] \lambda; \frac{\pi}{4} \right[$ tel que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \lambda\right) f'(\lambda)$.
- ❸ Montrer que $f'(\lambda) > \frac{3}{2}$ et en déduire que $\frac{\pi + 4\sqrt{2}}{12} < \lambda < \frac{\pi}{4}$.

 Exercice 3

Soit $f_n(x) = x^{n+1} - 3x^n + 2$, $n \geq 1$.

- ❶ Etudier les variations de f_n sur $\left[0; \frac{3n}{n+1}\right]$.
- ❷ En déduire le signe de $f_n\left(\frac{3n}{n+1}\right)$.
- ❸ Montrer qu'il existe un réel $\alpha_n \in \left[\frac{3n}{n+1}; 3n\right]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

✎ Exercice 4

- ❶ Pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $g(x) = \sin x - x - x^3 \left(\frac{\sin a - a}{a^3}\right)$ avec $a > 0$.
- (a) Montrer qu'il existe $c \in]0; a[$ tel que $g'(c) = 0$.
- (b) On pose $\theta = \frac{c}{a}$. Montrer que $a - \sin a = \frac{a^3}{3} \times \frac{1 - \cos(a\theta)}{(a\theta)^2}$.
- (c) En déduire que, pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin a < a$ et que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sin a - a}{a^3} = -\frac{1}{6}$.
- ❷ On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- (a) Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sin x} \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right)$.
- (b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- (c) Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$.
- (d) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
-

✎ Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{\pi} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right]$

- ❶ Dresser le tableau de variations de f .
- ❷ (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle J à préciser.
(b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}; \frac{2}{\pi}\right]$.
- (c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et en $\frac{2}{\pi}$.
- (d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$.
- ❸ Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, on a : $0 < f'(x) < 1$.
- ❹ (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une unique solution α .
(b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[0; 1]$.
- ❺ Soit (U_n) la suite réelle définie par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$.
- (b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- (c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
-

✎ Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $[0; 1[$. On suppose que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = -\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

- ❶ (a) Montrer que f est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$.
(b) Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\cos x) = \frac{2}{\pi}x$.
(c) En déduire $f^{-1}(x)$, $\forall x \in [0; 1]$.
- ❷ On pose $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$.

- (a) Montrer que h est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.
- (b) En déduire que $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $h(x) = 1$.
- ❸ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n$, $\forall x \in [0; 1]$.
- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! a_n \in]0; 1[$ tel que $\varphi_n(a_n) = 0$.
- (b) Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.
- (c) En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et qu'elle converge

❧ Exercice 7

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$, appelé une **série**

de Riemann de terme général $\frac{1}{k^3}$. On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

❶ En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[p; p+1]$

avec $p > 0$, montrer que : $\frac{2}{(p+1)^3} < \varphi(p) - \varphi(p+1) < \frac{2}{p^3}$.

❷ En déduire que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^3} < \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^3}$.

❸ Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et démontrer qu'elle converge.

❹ Donner un encadrement de la limite l de (u_n) .

❺ Montrer de la même façon que la **série de Riemann** de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente.

❧ Exercice 8

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout entier naturel non nul, il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$.

Pour cela, on pose $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, pour tout entier naturel non nul n

❶ Déterminer le domaine de définition de g_n pour $n \geq 1$.

❷ Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in Dg_n$, $m \leq g_n(x) \leq M$, pour $n \geq 1$.

❸ Soit k un entier naturel de l'intervalle $[0; n-1]$.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0)$.

(b) En déduire que $m \leq 0 \leq M$.

(c) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\exists c \in [0; 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$.

❧ Exercice 9

❶ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On notera alors F la primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.

❷ Etudier la parité de F et étudier le sens de variations de F sur $\mathbb{R}$.

❸ (a) Etudier les variations de la fonction $G : x \mapsto F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

(b) En déduire qu'il existe une constante c telle que pour tout $x > 0$, on ait : $F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = c$.

- ③ On pose pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.
- (a) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto Fog(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\varphi'(x)$.
- (b) En déduire que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $Fog(x) = x$.
- (c) Déterminer $F(1)$, $F(\sqrt{3})$ et $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. En déduire que $c = \frac{\pi}{2}$.
-

🔖 Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \sin x}$.

- ① (a) Vérifier que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$.
- (b) Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$.
- (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \frac{1}{(2+x)(\sqrt{1+x})}$.
- ② Soit (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = g\left(\frac{2}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)$ et $V_n = nU_n$.
- (a) Calculer la limite de la suite (U_n) .
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $c_n \in \left]\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$ tel que $V_n = \frac{1}{(2+c_n)(\sqrt{1+c_n})}$.
- (c) Déterminer alors limite de la suite (V_n) .
-

🔖 Exercice 11

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

- ① Montrer que g est bijective.
- ② On note $\arctan$ la bijection réciproque de g .
- (a) Démontrer que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- ③ Montrer que $\arctan$ est impaire.
- ④ Soit u la fonction définie par $u(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
- (a) Montrer que u est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $u'(x)$ pour $x > 0$.
- (b) En déduire que : $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- (c) En déduire la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x < 0$.

Partie B : On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant : $\arctan(u_n) + \frac{u_n}{n} - \frac{\pi}{4} = 0$.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(x) + \frac{x}{n} - \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$

- ① Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et que $u_n \in]0, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. On pourra calculer $f_{n+1}(u_n)$.
- ③ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
-

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \tan x$.

❶ (a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

(b) Soit g sa bijection réciproque. Montrer que g est dérivable sur J et que $\forall x \in J, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

❷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

(a) Montrer que : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}$.

(b) Montrer que h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que $\forall x \in [0; +\infty[, h'(x) = -\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}$.

❸ Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[, |h(x)| \leq \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.

(On pourra étudier les fonctions $h_1 : x \mapsto h(x) - \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$ et $h_2 : x \mapsto h(x) + \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$ sur $[0; +\infty[$)

❹ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{4n+3}$.

(b) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

❶ (a) Dresser le tableau de variations de g .

(b) En déduire que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

(c) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

(d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que $\forall x \in J, (g^{-1})'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.

❷ Montrer l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ une unique solution α et vérifier que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

❸ Soit h la fonction définie sur $[0; 1[$ par $h(x) = g^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(a) Montrer que h est dérivable sur $[0; 1[$ et calculer $h'(x)$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0; 1[, g^{-1}(x) - g^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

❹ Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n+k}\right)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right) g^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) \leq v_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) g^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2n}\right)$.

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 14

Partie A : Soit f la fonction définie sur $] -\infty; \pi[$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x - 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

❶ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

- ② Dresser la tableau de variations de f .
- ③ Soit g la restriction de f à l'intervalle $] - \infty; 0[$.
 - (a) Montrer que g réalise une bijection de $] - \infty; 0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - (b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Partie B : Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; \pi[$.

- ① Justifier que h admet une bijection réciproque définie sur un intervalle K à préciser.
- ② Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et que $\forall x \in K, (h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.
- ④ Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $\varphi(x) = h^{-1}(\sqrt{x}) + h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
 - (a) Justifier que φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
 - (b) Calculer $h^{-1}(1)$ puis en déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - h^{-1}(\sqrt{x})$.
- ⑤ On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} h^{-1}(\sqrt{k}) ; \quad v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h^{-1}(\sqrt{n}) \leq u_n \leq h^{-1}(\sqrt{2n})$.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
 - (c) Exprimer v_n en fonction de u_n .
 - (d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

🔖 Exercice 15

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[1; +\infty[$, vérifiant $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et $f(0) = 1$

- ① Etudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
- ② Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
 - (a) Comparer f' et g' puis f et g sur $[1; +\infty[$.
 - (b) Montrer que f est majorée sur $[1; +\infty[$ et admet une limite l en $+\infty$, vérifiant $0 \leq l \leq 1$.

🔖 Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \sum_{k=1}^n kx^k$.

- ① Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f_n(x) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.
- ② Pour tout $x \in [0; 1[$, on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Donner l'expression de $f(x)$.
- ③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée u_n dans l'intervalle $[0; 1]$. Calculer alors u_1 et u_2 .
- ④ (a) Etudier le sens de variations de la suite (u_n) . (On pourra utiliser les variations de f_n).
 (b) En déduire que (u_n) converge. On note l sa limite.
- ⑤ Démontrer que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^* : |f_n(x) - F(x)| \leq 3 \left(\frac{n+1}{2^n}\right)$.
- ⑥ (a) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u_n) = f(l)$.
 (b) En déduire la valeur de l . (on pourra utiliser en le justifiant $F(l) = 1$)

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sin \left[xE \left(\frac{1}{x} \right) \right] & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

❶ Etudier la continuité de f en 0.

❷ (a) Résoudre dans $[0; 2\pi]$, l'équation $E \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$ et $E \left(\frac{\pi}{x} \right) = p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) Donner une expression de f sur $[\pi; +\infty[$ puis sur chaque intervalle $\left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$.

(c) Etudier la continuité de f en $\frac{\pi}{p}$. En déduire le domaine de continuité de f sur $[0; 2\pi]$.

❸ (a) Montrer que la limite à droite en $\frac{\pi}{p}$ est finie et donner sa valeur y_p .

(b) Montrer que les points $M_p \left(\frac{\pi}{p}; y_p \right)$, $p \in \mathbb{N}^*$ appartiennent à une courbe S dont on précisera une équation cartésienne.

❹ (a) Montrer que f est dérivable sur chaque intervalle $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer la dérivée de f sur intervalle $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$.

(c) En déduire que f est une bijection de I_p sur un intervalle J_p à préciser.

(d) Montrer que la restriction f_p de f à l'intervalle $I_p = \left] \frac{\pi}{p+1}; \frac{\pi}{p} \right]$ admet une bijection réciproque dérivable sur un intervalle à préciser et vérifier que $(f_p^{-1})'(x) = \frac{1}{p\sqrt{1-x^2}}$.

❺ Tracer la courbe représentative de f et la courbe S sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{6}; \pi \right]$ dans un même repère orthonormé (unité : 5 cm)

Exercice 18

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2x}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

❶ (a) Etudier les variations de g .

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0$.

(c) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ puis montrer que la suite (u_n) est monotone.

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

❷ (a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{g(u_n) - 3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$.

(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(d) Déterminer une valeur possible de n pour que $u_n - 3 < 10^{-2}$.